目　　录

第一编　代数结构

第一讲　代数结构

H. Cartan　（索尔本大学教授）

1. 引　　言

近几十年来，我们目睹到代数在数学中名副其实地到处渗透. 特别是二十年代以后，在E. 诺特的推动下，数学家日益清楚地意识到代数的基本概念在数学的几乎所有分支中所起的作用；更确切地说，例如，他们意识到有可能把纯代数中某些多少算是深刻的定理用来考虑分析问题. 诚然，这种应用本身并非今日方有(尤其应当提到上世纪末李氏理论的发展)；特别新颖的东西才能引起人们的注意.

随着目前数学的这种代数化，任何研究人员再也不能无视近世代数这一必不可少的工具了. 反之，代数也从这种形势下得益不浅，因为拓扑与分析不断向代数提出一些新问题，产生了几十年前也许几乎无法想象的进展.

中学的数学教学，至少在最后一个学年，理应受到这个演变的影响. 如果说要重视新观点，问题无疑不在修订教学大纲，而在如何阐述古典理论. 这无疑就是法国数学会发起组织这一系列讲座的理由.

然而代数是什么呢？用几句话给出代数的定义，使得代数与其他数学分枝的界限一目了然，这是不容易的. 诚然，在

科学发展的每个时期，每位数学家对什么是代数与什么不是代数的看法是足够清楚的．但是任何明确的定义在以后科学的发展中都有变得陈旧或过于狭隘的危险．事实上，不可能预先给代数划定什么不可逾越的范围(任何科学分支的情形也是如此)，因为无法预见到在探索过程中会显现出哪些新领域．

粗略地说，可以认为代数是研究对一个或几个集合的元素施行的某些运算，而不考虑这些元素本身的性质．对于给了某些运算的一个集合，一切所能阐述的内容也完全适用于与它同构的任何其他集合(后文中要介绍同构的概念)．对代数的这种理解可能一个世纪以来都占上风，然而最近的进展无疑必将使代数扩大其过于狭窄的范围，因而上述理解今日可能已经过时了．这里，我们只限于用几个例子来说明我所谓的经典的代数概念，至于开创了目前某些进展的那些新观点，过几十年再让别人向读者说明吧！

2. 运算的概念

从算术起就有了运算的概念．运算是一个法则：对于两个元素 a 与 b，相应地给出一个元素 c(元素 c 有时称为 a 与 b 的和，有时称为它们的积，有时还有另外的名称)．其实，这里不过就是一个函数的概念：给了三个集合 A、B 与 C，考虑由元素 $a\in A$ 与元素 $b\in B$ 形成的偶对 (a, b) 的集合，叫做 A 与 B 的积集合，记作 $A\times B$；于是，一个运算就是定义在集合 $A\times B$ 上并在集合 C 中取值的函数．我们也说，运算是把 $A\times B$ 映入 C 的一个映射．

一个重要情形是这三个集合 A、B 与 C 相同的情形，此

时，考虑的是一个映射 $f: A\times A\to A$，这样的函数叫做内合成法则．如果只假定 $B=C$，则得到所谓的外合成法则：即是把 $A\times B$ 映入 B 的函数．此时，每个元素 $a\in A$ 确定一个把 B 映入 B 的映射，即是与 b 相应的是 $f(a, b)$．不过，把 B 映入 B 的映射也称作 B 的一个变换，于是外合成法则相应于 A 的每个元素给出 B 的一个变换；集合 A 就叫做算子域，并说 A 作用于 B．

下面举几个合成法则的例子．整数加法：与一对整数对应的是一个整数．整数乘法也一样．这些都是整数集合中的内合成法则．分数、实数、复数的加法与乘法，以及一个变量或多个变量的多项式的加法与乘法，也都是内合成法则．在初等几何中有位移概念．我们知道相继施行位移 a 与位移 b 就得到一个位移 c，有时称为 a 与 b 的积(或合成)．这样，相应于一对位移 (a, b) 我们得到一个位移 c，这是位移集合中的内合成法则．

下面是另外一些例子．设 X 与 Y 是同一集合 E 的两个子集，其交 $X\cap Y$ 是 E 中同时属于 X 与 Y 的那些元素组成，其并 $X\cup Y$ 是 E 中至少属于集合 X 与 Y 之一的那些元素组成．在 E 的所有子集构成的集合 A 中，对于偶对 (X, Y) 相应地给出交 $X\cap Y$ 的法则是一个内合成法则；同样，对于 (X, Y) 相应地给出并 $X\cup Y$ 的法则也是 A 中的内合成法则．

按照另一种思路，我们也会考虑两个整数 a 与 b 以及它们的最大公约数 $d(a, b)$；映射 $(a, b)\to d(a, b)$ 是整数集中的内合成法则．最小公倍数情形也是一样．

再给出字的例子．设有集合 E，所谓“字”是指 E 中元素组成的有限序列 uvwxy，这些元素可以不同，也可以相同．其

中还有一个"空字"，即是空序列定义的字。给了两个字 uvwxy 与 pqrs，相继写下这两个字可确定出一个新字 uvwxyp-qrs. 这是 E 的元素生成的字集 A 中的一个内合成法则. 如果将字 uvw 与空字合成，仍得到同一个字 uvw.

上述所有例子都是内合成法则的例子. 现在举两个外合成法则的例子. 考虑初等几何中的平面(或空间)，取定一点 O. 对每个实数 t，我们使以 O 为中心，以 t 为比例常数的位似与之相应；这是一个变换. 这里我们得到一个外合成法则，其算子域 A 是实数 t 的集合，相应的集合 B 是几何学中的平面(或空间).

再考虑空间的"图形"(例如三角形). 一个位移将图形变成图形. 于是若取位移集合为 A，空间图形的集合为 B，就得到一个外合成法则，其算子域是位移集合.

以后我们几乎只讨论内合成法则.

3. 内合成法则的各种性质

结合性　一个合成法则，比如记作乘法 (ab 表示 a 与 b 的合成)，称为结合的，如果对任意的 a、b 与 c，有 $(ab)c=a(bc)$.

在上面例子中我们给出的所有内合成法则都是结合的. 容易给出非结合法则的例子：对一对实数 (a, b)，我们使其和之半 $(a+b)/2$ 与之相应；立即可以验明这个法则不是结合的.

如果一个法则是结合的，可以定义任何有限多个元素的序列 $a_1, \cdots, a_n$ 的合成，并证明有关结合性的一个一般定理；例如，有

$$(ab)(cdef)g=(abc)(de)(fg).$$

交换性 一个内法则(为确定计记作乘法)称为*交换的*,如果对任意 a 与 b, 有 $ab=ba$. 在上述例子中,实数、复数以及多项式的加法与乘法都是交换法则. 同样,集合的交运算与并运算也是交换的; 求两个整数的最大公约数或最小公倍数的法则也是交换的. 与此相反,几何中位移的合成不是交换的;"字"的合成也不是交换的.

这样,就存在结合的但不是交换的法则. 同样也有一些交换的但不是结合的法则,例如求两实数 a 与 b 之和之半的法则.

一个法则如果既交换又结合,则可以定义任意元素组(自然是有限组——译注)的合成,而不必计及它们的次序.

中性元 给了一个内法则(为确定计记作乘法),元素 e 称为*中性元*,若对每个元素 a, 有 $ae=ea=a$. 这种元素不一定存在,但*若存在必唯一*,因为若 e 与 e' 是两个中性元,则有 $e=ee'=e'$.

逆元 考虑一个有中性元 e 的内法则. 我们说 a 与 b 互为*逆元*,若 $ab=ba=e$.

如果 a 至少有一个逆元,并且法则是结合的,那么 a 的逆元是唯一的;因为,若 b 与 b' 都是 a 的逆元,则有

$$b=be=b(ab')=(ba)b'=eb'=b.$$

如果考虑的法则表作加法(通常只是在法则是交换的时候才行),其中性元若存在,一般记作 0(零). 我们有

$$a+0=0+a=a.$$

此时,"逆元"改称为"反元":若 $a+b=0$, 则称 a 与 b 互为反元.

4. 由一个或多个合成法则定义的代数结构

设 E 是一集合. 给了一个或多个合成法则, 就在 E 上定义了一个代数结构. 所有的代数结构(不论定义在哪个集合上), 只要定义它们的法则数目一样, 满足同样一些明确罗列的条件, 就都用同一个名称. 用几个例子来说明这点.

群 集合 E 上的群构造是由一个合成法则定义的, 这个法则必须满足下列条件(或"公理"):

公理 1 法则是结合的;

公理 2 存在中性元;

公理 3 每个元素具有逆元.

具有这样一个合成法则的集合 E 就称为*群*.

例如, 整数(正、负及零)的加法是一个群法则. 实数或复数的加法也是群法则; 具有前述合成法则的位移集合是一个群. 非零实数或非零复数的乘法是一个群法则. 反之, 正整数的乘法法则不是群法则, 因为一个正整数一般没有逆元. 集合的交运算法则或并运算法则也都不是群法则. 同样, "字"的合成法则不是群法则.

一个群称为*交换群*(或*阿伯尔群*), 若其合成法则是交换的.

环 一个集合 A 上的环构造是由两个合成法则定义的, 分别称为*加法*与*乘法*; 这两个法则必须满足下列公理:

公理 1 加法是一个阿伯尔群法则(其中性元记作 0).

公理 2 乘法是结合, 有中性元(称作单位元), 记为 1; 约定 $1\neq 0$.

公理 3 乘法对于加法是分配的:

$$a(b+c)=(ab)+(ac),\ (b+c)a=(ba)+(ca).$$

易见，每个元素与0的积等于0；因而0没有乘法逆元。

一个环称为交换环，若其乘法是交换的。

环的例子：全体整数；实数或复数集；实系数或复系数的多项式。（其加法与乘法运算如平常所定义——译注。）

体　一个体是一个环 A 并满足下面补充条件：每个非零元素都有乘法逆元素；这也就是说，A 的非零元素构成一个乘法群。

例子　整数集不是一个体，多项式全体不构成一个体；有理数集，实数集以及复数集都是体。

当然，存在各种各样的群，环与体。伽罗华已经确定了所有的有限体，亦即具有有限多个元素的体。最简单的是只有两个元素0与1的体，其加法与乘法是显然的（特别有 $1+1=0$）。对每个素数 p 与每个整数指数 $f\geqslant 1$，存在恰好有 p^f 个元素的体，并且这样的体是唯一的。记整数 p^f 为 n，体中每个元素 x 满足方程 $x^n-x=0$（这就给出一个例子，说明存在系数不全为零的多项式，对变量所有的值均为零；这个多项式是 n 次的，并且变量仅能取 n 个不同的值，因为体中仅有 n 个元素）。如果整数 n 不是 p^f 形状的数，则不存在由 n 个元素数组成的体。

5. 同构概念

方才说存在唯一一个具有 p^f 个元素的体。这不完全对。正确的说法是：如果两个体有同样多个元素，则它们是同构的。就是说在这两个体的元素之间存在一个一一对应，并且这个对应保持加法与乘法。一般，对各有其代数结构的两个

集合 E 与 E'，可以建立同构的概念；例如，两个群之间的同构是这两个群的元素之间的一一对应，并保持每个群的合成法则；例如，指数函数 $f(x)=a^x$（这里 a 是不等于 1 的正常数）就是把实数加法群映成正实数乘法群的同构，因为 $f(x+y)=f(x)f(y)$. 又两个环 A 与 A' 之间也有同构概念：即是一个一一对应，保持加法与乘法，还使 A 与 A' 的单位元彼此对应.

代数对象实际上只研究到同构为止. 这正是实质所在，因为我们只关心所研究运算的性质. 如果有两位数学家谈到整数环，我们并不问他们是否谈的是同样的对象，因为从他们对整数环研究出来的那些性质推知，任何两个环如果具有这些性质就必然同构.

6. 从已有的代数对象构造新的代数对象：多项式环的例子

设给了一个交换环 A（例如实数体或整数环，等等）. 我们来定义一个新环，称为字母 X 的（形式）多项式环. 它的元素用符号 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 表示，这里诸 a_n 是 A 中元素，只有有限多个不为零；记号 X^n 暂时没有任何内容，只是一个形式记法，因此，定义多项式的，不过就是一序列"系数" $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$，罢了，这些"系数"除有限多个外全为零. 在多项式集合中定义加法如次：多项式 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 与多项式 $\sum_{n\geq 0} b_n X^n$ 的"和"定义为多项式 $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)X^n$，其系数是相应系数之和 a_n+b_n. 立刻可见这个加法是交换的，结合的，具有零元 0（所有系数全为零的多项式），并且每个多项式都具有"反元"；换句话说，多项式集构成加法群.

p 次单项式是指一个多项式 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$，使得 $n \neq p$ 时所有系数 a_n 皆为零；这样的单项式可以简记作 $a_p X^p$. 我们看到每个多项式 $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 是其各次单项式 $a_n X^n$ 的和. 这就反过来说明了所用记法的理由.

多项式的乘法定义如次：首先定义单项式 $a_p X^p$ 与单项式 $b_q X^q$ 的积为单项式 $(a_p b_q) X^{p+q}$，其次数 $p+q$ 是两个单项式的次数之和，其系数 $a_p b_q$ 是系数 a_p 与 b_q 的积. 为了定义两个多项式 $\sum a_n X^n$ 与 $\sum b_n X^n$ 的积，先把每个多项式分解为它的不同次数的单项式，然后对这些单项式两两求积再相加；这给出下列公式：积是多项式 $\sum c_n X^n$，这里 $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.

可以验明，字母 X 的多项式集 $A[X]$，照上面那样定义加法与乘法后，成为一个交换环，其单位元是系为 1 的零次单项式. 这样就定义了字母 X 的多项式环（系数在交换环 A 中）.

X 纯粹是一个符号. 但我们可以用"值"来替代它. 给了一个元素 $x \in A$，约定：对每个单项式 $a_n X^n$，我们相应地有 A 的元素 $a_n x^n$（系数 a_n 与 x 的 n 次幂的积）；然后，对多项式 $\sum a_n X^n$ 也相应地有这些 $a_n x^n$ 的和. 这样就得到 A 的一个元素，称为这个多项式在 X 取值 x 时的"值". 当 x 在 A 中变化时，一个多项式的"值"就是 x 的一个函数，其值属于 A. 这样，每个多项式都定义一个函数，但一开始就应该提防将形式多项式与它所确定的函数混为一谈.

现取定元素 $\alpha \in A$，对每个多项式 $\sum a_n X^n$，我们有与它相应的值 $\sum a_n \alpha^n \in A$. 这就得到一个映射 f，把环 $A[x]$ 映入环 A；这个映射使得对应于两个多项式之和的值，就是这两个多项

式之值的和，而对应于两个多项式之积的值，则是这两个多项式之值的积．我们定义形式多项式的加法与乘法的方式，正是为了保证映射 f 具有上述性质．于是，设 u 与 v 为两个多项式，则有

$$f(u+v)=f(u)+f(v),\ f(uv)=f(u)f(v),$$
$$f(1)=1.$$

只要两个环 B 和 A 以及把 B 映入 A 的映射 f 满足这些条件，就说 f 是把 B 映入 A 的一个同态．同态的概念可以推广至其他种种代数结构中；粗略地说，同态是一个保持合成法则的映射．

再来讨论多项式，我们可以将前面所述推广．设 A' 是包含 A 的一个环；可以将字母 X 换成属于 A'(不再只属于 A)的值 x；这时，每个多项式 $\sum a_nX^n$ 取值 $\sum a_nx^n$，这个值是 A' 的元素．只要 x 与 A 的元素可交换，即对于每个 $a\in A$，有 $ax=xa$，上述做法仍然定义了一个把环 $A[x]$ 映入环 A' 的同态．例子：设 A 是实数体，E 是三维空间中由原点 O 发出的向量构成的向量空间．把 E 映入 E 的线性映射构成一个环(我们知道如何定义两个线性映射的和，相继施行两个线性映射就得到它们的积)；这个环 A' 包含了以 0 为中心的全体位似构成的环 A，环 A 可以与纯量体(即实数体——译者注)等同．于是，如果在实系数多项式 $\sum a_nX^n$ 中，将 X 换成把 E 映入 E 的线性映射 x，就给出了 $\sum a_nx^n$，这仍然是一个把 E 映入 E 的线性映射．这个法则使得与每个多项式对应的是一个线性映射，这对研究向量空间的线性变换十分重要．这个例子使我们看到从形式多项式概念得到的好处，即是可以将“变量” X 换成系数环的元素以外的东西．另外一个例子是把 X 换成线性微分方程理论中讲的那种微分算子．

7. 商 结 构

从已有代数结构造出新的代数结构时(例如,从整数环造出有理数体或从实数体造出复数体),常常需要等价关系的概念. 集合 E 的元素 x 与 y 之间的关系 $R(x, y)$ 称为一个等价关系,如果

1° $R(x, x)$ 总是真的("反身律");

2° $R(x, y)$ 蕴涵 $R(y, x)$ ("对称律");

3° $R(x, y)$ 与 $R(y, z)$ 蕴涵 $R(x, z)$ ("传递律").

下面是代数中出现的等价关系的若干例子:

1) 设 m 为已知整数,两个整数 x 与 y 之差 $x-y$ "被 m 整除"这个关系是整数 x 与 y 之间的等价关系.

2) 更一般地,设 G 为乘法群(元素 x 的逆元记作 x^{-1}), H 为 G 的子群,即是含单位元 e 的一个子集,使得 $x\in H$,与 $y\in H$ 蕴涵 $x^{-1}y\in H$. 对于 G 的元素 x 与 y, 关系 $x^{-1}y\in H$ 是 G 中的一个等价关系. 例 1 的情形就是: G 是整数加法群, H 是 m 的倍数构成的子群(这时用加号表示合成法则).

3) 设 (a, b), (a', b') 是两对整数,满足 $b\neq 0$, $b'\neq 0$. 若 $ab'=a'b$, 则称它们等价. 需要验明, 这的确是一个等价关系. 易见这个关系是反身的与对称的, 于是只要说明它是传递的即可. 这有三对整数 (a, b), (a', b') 与 (a'', b''), 满足 $ab'=a'b$, $a'b''=a''b'$, 问题是要证明 $ab''=a''b$. 将式子 $ab'=a'b$ 两边乘以 b'', 注意乘法的结合性与交换性, 有 $ab'b''=a'bb''=ba'b''$, 据 $a'b''=a''b'$, 前式后一元素等于 $ba''b'$, 于是 $ab'b''=ba''b'$, 从而 $b'(ab''-a''b)=0$; 因为 $b'\neq 0$, 而一个乘积只有当一个因子为零时才能为零, 所以得到 $ab''=a''b$.

注意，上面的论证对于下面更一般场合仍然有效：不考虑整数对，而考虑一个环 A 的元素对 (a, b)，这里 $b\neq 0$. 这时要求 A 满足下面条件：A 是交换环，且当 u 与 v 不为零时，积 uv 不能为零. 这种环称为整环.

整环的例子：设 A 是交换环，$A[x]$ 是字母 X 的多项式环，P 与 Q 为两个非零的多项式，亦即其系数不全为零，所以有 $P=a_pX^p+a_{p+1}X^{p+1}+\cdots$, $a_p\neq 0$ 与 $Q=b_qX^q+b_{q+1}X^{q+1}+\cdots$, $b_q\neq 0$. 于是积 PQ 是单项式 $(a_pb_q)X^{p+q}$ 及次数 $>p+q$ 的单项式的和. 如果系数环 A 是整环(例如 A 是体)，则积 $a_pb_q\neq 0$，从而乘积多项式 PQ 不为零. 这就证明了环 $A[X]$ 也是整环. 这时我们就可以在多项式对 (P, Q) 与 (P', Q') (这里 $Q\neq 0$, $Q'\neq 0$) 之间定义一个等价关系，这实质上就是有理分式的等价，这里无须诉诸函数的概念而是纯粹形式地把有理分式的等价化成多项式的恒等.

现在再来讨论等价关系的一般理论. 设 R 是集合 E 中的等价关系，x 是 E 的元素，所有与 x 等价的元素的集合称为 x 的等价类. 条件 1°, 2° 与 3° 说明 x 属于 x 的等价类；若 x 与 y 是 E 的两个元素，则 x 的等价类与 y 的等价类或者完全相同或者没有公共元素. 所有等价类的集合记作 E/R，也称为 E 对等价关系 R 的商集合. 我们也说 E/R 是把 E 中关于 R 等价的元素粘合而得.

现在再考虑上面讨论过的那些等价关系的例子 1), 2) 与 3). 例 1) 的等价类称为模 m 整数(或模 m 等价类)；商集合称为模 m 整数集. 例 2 的等价类称为 G 对子群 H 的一个右陪集；$x\in G$ 的右陪集记作 xH，由形如 xu 的元素组成，这里 u 遍取 H 中元素. 例 3) 的等价类正是一个分数(当 A 是多项式环时，就是"有理分式").

8. 与等价关系相容的合成法则

设 R 是集合 E 中的等价关系，还给了 E 中一个内合成法则(为确定计记为乘法). 如果合成元 xy 的等价类仅仅依赖于 x 的等价类与 y 的等价类，就得到等价类集合 E/R 中的一个合成法则.（此时亦说这个合成法则与等价关系相容——译注.）

例子 设 x 与 y 为两个整数，考虑它们的和 $x+y$. $x+y$ 的模 m 类并不因用 x' 代替 x 而有所改变，只要 $x-x'$ 为 m 整除；它也不因用 y' 代替 y 而有所改变，只要 $y-y'$ 为 m 整除. 由此可得*模 m 整数的加法*，这是模 m 整数集中一个合成法则；它是交换的与结合的. 同样，积 xy 的等价类仅仅依赖于 x 与 y 的等价类；由此可得*模 m 整数的乘法*. 容易验明，模 m 整数全体构成一个*交换环*. 此外，若 m 是素数，它还是一个*体*.

现在定义分式的乘法[注]：在偶对 $(a, b)\ (b\neq 0)$ 集合中考虑合成法则：$(a, b)(a', b')=(aa', bb')$，这是交换的与结合的法则，有单位元 $(1, 1)$. 可以证明，(aa', bb') 的等价类仅仅依赖于 (a, b) 与 (a', b') 的等价类；由此可得两个分式的积. 于是分式的乘法是交换的与结合的；此外，每个不在 $(0, 1)$ 的等价类中的元素(正确地说，应是这个元素所属的等价类——译者注)具有逆元，因为当 $a\neq 0, b\neq 0$ 时，(a, b) 与 (b, a) 的积等价于 $(1, 1)$.

注 利用偶对 (a, b) 的集合中下述合成法则，容易定义*分式的加法*，这个法则只是当 $b=b'$ 时才对 (a, b) 和 (a', b') 有定义，即是 $(a, b)+(a', b')=(a+a', b)$. 将此法则过渡到

[注] 这时相应的环 A 自然假设是整环.——译者注

商集后，环 A 的分式集合 Q 就有了加法与乘法，而且成为一个环，也是一个体．此外，对每个元素 $a\in A$，使一个分式，即 $(a, 1)$ 的等价类与之对应，我们看到，这就得到一个同构 f，把环 A 映成体 Q 的一个子环．这时我们说，f 可以把 A 粘到体 Q 的一个子环上．(例如，可以把整数环粘到有理数体的一个子环上，也可以把字母 X 的多项式环粘到字母 X 的有理分式体的一个子环上．)

最后例子　拓扑空间 X 的基本群(亦称"普昂卡雷群")

我们不来定义所谓的拓扑空间，而只指出若干的实例：通常的欧氏空间、球面、环面以及带孔的圆盘，等等．

让我们确切地定义空间 X 中的道路，即曲线段的概念：这就是指把数直线的线段 $[0, 1]$ 映入空间 X 的一个连续映射 $t\to f(t)$．我们指出，对于"参数" t 的不同的值，$f(t)$ 可取相同的值；这点是没有妨碍的．

此后取定空间 X 的一点 M．以 M 为起点的闭路定义为一条道路 $t\to f(t)$，使得 $f(0)=M$ 与 $f(1)=M$．以 M 为起点的闭路集合 L 中，定义一个合成法则如次：给了闭路 f 与 g，定义闭路 h 为

$$h(t)=f(2t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1/2),$$
$$h(t)=g(2t-1)\quad (1/2\leqslant t\leqslant 1).$$

换句话说，在头一半"时间"里跑过闭路 f，然后在后一半时间里跑过闭路 g．这个法则不是结合的，因为如果有三条闭路 f，g 与 h，那么闭路 $(fg)h$ 是头四分之一的时间跑过 f，第二个四分之一的时间跑过 g，而在后一半时间里跑过 h；然而，闭路 $f(gh)$ 则是在前一半时间里跑过 f，第三个四分之一时间里跑过 g，而最后四分之一时间里跑过 h．

现在，在闭路集合 L 中引进一个等价关系 R：闭路 f 称为

等价于(或说同伦于)闭路 g, 如果存在一个连续形变, 即是连续变化的一族以 M 为起点的闭路, 把 f 变成 g; 精确地说, 这是指存在一个连续函数 $F(t, u)$, 两个变量 t 与 u 在 $[0,1]$ 中变化, 使得

$$F(t, 0)=f(t),\ F(t, 1)=g(t),$$
$$F(0, u)=F(1, u)=M.$$

可以验明, 这的确是一个等价关系, 并且闭路的合成法则与这个关系相容; 这样, 在闭路等价类的集合 L/R 中就有一个合成法则, 这一次是结合的了. 可以证明这是一个群法则, 其单位元 e 是满足下述条件的闭路 f 的等价类: 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时, $f(t)=M$ (即是坚守在点 M 不动的闭路). 设有闭路 f, 由 $f'(t)=f(1-t)$ 定义的闭路 f'(这是同一条闭路, 但以"相反的方向"跑过)具有下述性质: f 和 f' 的等价类在闭路等价类的群 L/R 中是互逆的.

方才定义的群(空间 X 以 M 为基点的基本群)在拓扑学中与在函数(自守函数)论中都起重要的作用. 从最后这个例子我们看出代数的概念如何进入数学的其他领域.

第二讲　环，同余，理想

P. Dubreil　（索尔本大学教授）

1. 定义与若干简单性质的回顾

考虑任一集合 $A=\{a, b, \cdots\}$，集 A 称为一个环，如果 A 上定义了两个运算，亦即内合成法则，分别叫做加法与乘法，用通常的记号表示，满足下述公理：

I. A 关于加法是阿贝尔群，即加法是结合的：$a+(b+c)=(a+b)+c$；交换的：$a+b=b+a$（"阿贝尔"这个词就表示这个交换性质）；存在单位元，叫做零元，记为 0，满足 $a+0=a$；对每一元 $a\in A$ 有一反元 $-a$ 满足 $a+(-a)=0$（简写成 $a-a=0$）。

II. 乘法是结合的：$a(bc)=(ab)c$。

III. 乘法关于加法是分配的：

$$a(b+c)=ab+ac,\ (b+c)a=ba+ca.$$

上述各种性质当然是假定对 A 中任何 a, b, c 都成立。

若乘法是交换的，环就叫可换的。本文讨论的主要是可换环。

在定义环的公理中，没有假设存在单位元 e 或 1（乘法单位元：对任意的 $a\in A$，有 $ea=ae=a$）[注]。如果存在单位元，

[注]　在这点上，我们的定义与 H. 嘉当在其关于代数结构的讲演中所给出的定义不同，要一般些，而且是沿用经典的定义，例如见[3]，p.35 与 p.38；[1]，p.115；[2]，p.138. 方括号中的数字表示本文末所附文献。

就称A是有单位元的环．在只由一个零元素构成的环内，零就是乘法单位元，不过，我们提到有单位元的环时，一般不是指这种情形．

易见，在每个环A内，乘法关于减法是分配的，零元素0满足：$0\cdot a=a\cdot 0=0$（对任意$a\in A$），即只要有一因子为零乘积就为零，但这乘积为零的充分条件只有对一些特殊的环才是必要条件；我们要碰见一些很简单的环，有些非零元之积可以为零．

多于一个元素的环K，$K\neq\{0\}$，关于乘法决不能成群，这是因为：

$$a\neq 0,\ a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

但是，$K-\{0\}$关于K的乘法有可能成群（即K中两个非零元的积不是零，存在单位元e，并且每一元$a\neq 0$具有逆元素a^{-1}：$aa^{-1}=a^{-1}a=e$）．如果这样，就说K是体．

2. 例

全体整数的集合$C=\{\cdots,\ -m,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ \cdots\}$是环；全体偶数的集合也是环，因为我们不要求环具有单位元．

有理数集Γ，实数集P，复数集Ω都是体（包含集合C）[注1]．代数数的集合Σ也是体．所谓代数数，就是有理系数或整系数（两者是一回事）代数方程的根（实数或复数）[注2]．

[注1] 记号C, Γ, P, Ω不是通用记号，后面的某些讲演中则换成Z, Q, R, C.

[注2] 这个命题容易归结为对称函数的理论．例如参见 [2], VII 章，p. 396.

给了一个环 A，例如上面诸例之一，我们可以定义系数在 A 中的、字母 X 的多项式环 $A[X]$[注]，以及系数在 $A[X]$ 中的、字母 Y 的多项式环 $A[X][Y]$；后面这种多项式可以写成 $\sum\limits_{ij} a_{ij}X^iY^j$, $a_{ij}\in A$(诸系数 a_{ij} 中仅有有限多个不为零)，关于字母 X 和 Y 显然对称，这就得到所谓的系数在 A 中的字母 X 与 Y 的多项式环，记成 $A[X, Y]$. 可以递推定义系数在 A 中的、n 个未定元 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的多项式环 $A[X_1, \cdots, X_n]$.

另一个重要的环是模 m 整数环，m 是给定的整数(参见本书第一编第一讲"代数结构"的第 8 节). 这个环是用模 m 的算术同余关系 R 定义的，其中加法与乘法与同余关系是相容的(也可以说，这个同余关系关于整数环 C 的加法与乘法是一个正规等价关系)：这个环就 C 关于(同余)等价的商集 C/R 或 $C/(m)$，可以表示成(以 m 作除数所得 m 个余数的)集合$\{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{m-1}\}$. 对于每个给定的 m，容易造出模 m 整数集 $C/(m)$ 的加法与乘法表，从而可以发现一个值得注意的情况：例如，对于 $m=4$ 我们有 $\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{0}$; 对于 $m=6$，我们有 $\bar{2}\cdot\bar{3}=\bar{0}$. 一般，只要 m 不是素数，$C/(m)$ 就不是整域(或整环)；反之，若 p 为素数，则 $C/(p)$ 是整域，甚至是体(稍过片刻我们就要定义整域).

在复数体 Ω 中，我们考虑形如 $\alpha+\beta i$ 的复数，这里 α, β 是有理数：$\alpha, \beta\in\Gamma$. 这些数的集合显然是体，记为 $\Gamma(i)$. 记号 $\Gamma(i)$ 表明，这是 Ω 中包含体 Γ 与数 i 的最小子体. 我们说，$\Gamma(i)$ 是由添加 i 而得. 可以不使用 Ω 而从 Γ 出发用下

[注] 参看 H. Cartan 关于代数结构的讲演. 字母 X 是"纯符号"，也称为未定元，其作用犹如循环半群的生成元，见[3], p. 50; [2], p. 326. 在有单位元的环中，X 是一个特殊的多项式($a_1=e$; 当 $i\neq1$ 时 $a_i=0$).

述方法直接构造体 $\Gamma(i)$，这是后面要讨论的符号添加法的特例.

在多项式环 $\Gamma[x]$ 中，考虑多项式 x^2+1，现在让它担任前面讨论整数环 C 时模 m 的那种角色．我们说，$\Gamma[x]$ 的两个多项式 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 有关系 R，如果 $\varphi-\psi$ 是 x^2+1 的倍数．这样定义的关系 R 是一等价关系，并且关于多项式的加法与乘法是正规的．等价的多项式构成的类，其相加与相乘如同所含多项式的相加与相乘，于是多项式等价类的集合构成环，称为商环，或剩余类环，记为 $\Gamma[x]/R$ 或 $\Gamma[x]/(x^2+1)$．Γ 中不同的数属于不同的等价类，可以把两者看成一样．每个等价类中都含有一个一阶多项式 $\alpha x+\beta$，即是类中各个多项式用 x^2+1 去除所得的公共余式．若用 i 表示包含多项式 x 的等价类，则包含 $\alpha x+\beta$ 的等价类是 $\alpha i+\beta$(根据正则性)．因为 x^2+1 与 0 是两个等价的多项式，故有 $i^2+1=0$．最后，若 α，β 不全为零，则 $\alpha+\beta i(\neq 0)$ 有逆元 $\dfrac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$．这个商环正好就是包含 Γ 与方程 $x^2+1=0$ 的根 i 的体(显然，不存在任何更小的体具有此性质)．

上面的纯代数方法起始于柯西，如用实数体 P 代替有理数体 Γ，也可用这种方法造出复数体 $\Omega=P(i)$．我们也可以把 -1 换成一个不是完全平方的整数 d，仍按上述方法构造出体 $\Gamma(\sqrt{d})=\Gamma[x]/x^2-d$，特别，可以用纯代数的方法界定形如 $\sqrt{d}$ 的无理数．上面的方法叫做符号添加法，可以用来定义任意的代数数，这是后话．今后要着重考虑关于环的加法与乘法的正规等价关系；为简化说法以及联想到这一概念的算术来源，我们把这些关系称为同余关系．

在如上造出的体 $\Gamma(\sqrt{d})$ 中，有一个简单但值得注意的

环：就是形如 $a+b\sqrt{d}$ 的数所成的环，这里 a，b 是任何整数：a，$b\in B$．特别，数 $a+bi$ 是高斯整数；高斯整数构成的环由平面的“整点格”表示，所谓整点就是坐标为整数的点．

虽然我们只讨论交换环，但要提醒，一个环 A(可以是体)中的元素组成的 n 阶方阵构成一个环 ($n>1$ 时为非交换环)．

3. 整　　域

整域(或整环)是一个交换环 D，使得 D 内的乘积 xy 仅当因子 x 或 y 至少有一为零时才能为零．换句话说：$D-\{0\}$ 中两个元素的积仍在 $D-\{0\}$ 中，即 $D-\{0\}$ 是乘法封闭的．此外，$ab=ac$ 与 $a\neq 0$ 蕴涵 $b=c$；形如 $ab=ac$ 的等式在 $D-\{0\}$ 可约简．若 $D-\{0\}$ 为有限集，则在其乘法表中，一个元在每一行或每一列正好出现一次，这就是说，方程 $ax=b$ 恒有解，故 $D-\{0\}$ 是乘法群(当然是阿贝尔群)，于是 D 是体；每一有限整域都是体．p 为素数时，$C/(p)$ 就是一例．

若 D 是非有限的整域，考虑分式 $(a,\ b)$ 或 $\frac{a}{b}$ $(a, b\in D,\ b\neq 0)$，便可造出一个含有 D 的(最小的)体，称为整域 D 的商体．这个体的元素是分式的等价类[注]．

[注]　参看 H. Cartan 关于代数结构的讲演中的第 7，8 节．D 中单位元的存在不是必须的$\left(\text{我们用分数 } \frac{m}{m} \text{ 代替 } \frac{1}{1}\text{，用 } \frac{am}{m} \text{ 代替 } \frac{a}{1}\right)$．构造一个整域的商体，可以更简单地从构造包含已知阿贝尔半群 S 的最小群而得(集合 S 是阿贝尔半群是指：S 具有结合的、交换的乘法运算，并满足约简规则：$ab=ac$ 蕴涵 $b=c$)．阿贝尔半群的结构也完全可以用来从自然数出发定义整数，或者从正实数出发定义任意实数，这里，所考虑的运算是加法．见[2]，第 V 章，§2 与 §3．p. 224(很容易不用[2]的 §1)．

设 K 是(交换)体；若 x, $y\in K$, $xy=0$, $y\neq 0$ 时，x在 K 内有逆元素 x^{-1}，于是

$$0=x^{-1}(xy)=(x^{-1}x)y=y.$$

所以，K 中任何一个环，特别是 K 自身，都是整域.

今考虑多项式环 $D[x]$. 这里 D 是整域，n 次多项式 $f(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n(a_n\neq 0)$ 与 p 次多项式 $g(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_pX^p(b_p\neq 0)$ 的积是 $n+p$ 次多项式 $a_0b_0+\cdots+a_nb_px^{n+p}$ (因为 a_nb_p 不为零). 若 A 是任意环，那么，在环 $A[x]$ 内，n 次多项式与 p 次多项式的积至多是 $n+p$ 次；若 A 不是整域，则存在乘积的次数小于 $n+p$ 的例子. 当 A 不是整域时，有个很值得注意的意外：一多项式 $f(x)\in A[x]$，当 $x=a$, $x=b$ 时为零，a, $b\in A$, $b\neq a$. 我们并不能断言此多项式能被 $(x-a)(x-b)$ 整除；此外，一个 n 次多项式 $f(x)$ 完全可能对于 n 个以上不同的 x 值为零. 例如，取 $A=C/(4)$，一次多项式 $2x$ 当 $x=0$ 与 $x=2$ 时为零.

4. 特　征　数

设环 A 具有单位元 e, n 是整数. 若 n 是正整数，$x\in A$，则令

$$nx=x+\cdots+x \quad (n\text{ 个相加}).$$

若 $n=0(\in C)$，我们令 $0x=0(\in A)$. 若 n 是负整数，我们令

$$nx=-(|n|x),$$

因 $x=ex$，故有

$$nx=(ne)x.$$

因此，若存在非零整数 n，使得

$$ne=0, \tag{1}$$

则对所有 $x\in A$ 有

$$nx=0.$$

设 n_0 是满足如上等式的正整数中之最小者，这时，我们说，n_0 是环 A 的特征数.

若不存在任何非零整数满足方程(1)，就说A的特征数为零(因为这时 0 是满足下述条件的唯一整数：对任何 $x\in A$ 有 $0e=0,\ 0x=0$).

整域 D 的特征数或为 0 或为一素数 p. 否则，若 $n_0=n_0'n_0''$, n_0', $n_0''\neq 0,\ 1$, 则 $n_0'e=a\neq 0$, $n_0''e=b\neq 0$, $ab=n_0e=0$，这样 D 就不是整域了.

请特别注意，教学工作中经常有人说，"所有代数计算规则"都是特征为零的整域内有效的计算规则，我想这是不确切的.

现在让我们来考察特征数 $p\neq 0$ 的整域内某些有趣的特点.

在每个交换环内，二项式公式成立：

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+b^n,$$

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(在非交换环内，例如我们只能写出 $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$.)

在上面二项式公式中，取 $n=$整域 D 的特征数 p. 因 $k\neq 0$, $k\neq p$ 时，C_p^k 是 p 的倍数，故有

$$(a+b)^p=a^p+b^p.$$

用 $a-b$ 代 a 得

$$(a-b)^p=a^p-b^p.$$

逐步使用这公式，又得

$$(a_1+\cdots+a_r)^p=a_1^p+\cdots+a_r^p,$$
$$(a+b)^{p^f}=a^{p^f}+b^{p^f},$$
$$(a-b)^{p^f}=a^{p^f}-b^{p^f},\quad (f\text{ 是任意自然数}).$$

设 D 具有单位元 e, 在上面公式中, 取 $a_1=a_2=\cdots=a_r=e$, 将 re 写成 r, 则对任意的自然数 r 有

$$r^p=r.$$

特别是,这个公式对模 p 整数体 $C/(p)$ 成立. 如果仍然用整数环 C 的语言,可见对所有自然数 x 有费马定理

$$x^p\equiv x\ \ (p).$$

现在设 A 是任意交换环,在多项式环 $A[x]$ 中,可用纯代数方法定义多项式 $f(x)$ 的导数:把 $f(x+h)$ 按 h 的幂展开:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots,\ f(x+h)\in A[x,\ h],$$

其中 h 的系数就定义为 $f(x)$ 的导数. 由此容易得到导数的计算法则:若

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$

则
$$f'(x)=na_nx^{n-1}+\cdots+a_1.$$

$f'(x)$ 至多是 $n-1$ 次多项式; 当环 A 的特征数是 0 时, $f'(x)$ 确为 $n-1$ 次; 反之, 若 A 的特征数是 n_0, 而 n 是 n_0 的倍数, 则 $f'(x)$ 的次数肯定小于 $n-1$. 特别, 若 A 是具有单位元的整域或特征数为 p 的体,则 x^p 的任何多项式

$$f(x)=a_nx^{pr}+\cdots+a_1x^p+a_0$$

有零导数(即"恒为零"). 可以想见, 这结果在代数方程的理论中是轰动一时的. 若取 A 是特征数为 p 的某些体, 则上述结果与 $f(x)$ 在 $A[x]$ 中的既约性并非不相容. 例如[注] A 是未定元 t 的, 系数在体 $K=C/(p)$ 中的有理分式体 $K(t)$; $f(x)=x^p-t$.

[注] 这个例子的讨论要用到几个眼下无法介绍的命题。

5. 理　　想

在交换环 A 中，设 R 是同余关系(即对 A 的加法与乘法的正规等价关系)．在代数构结构那个讲演中已知，等价类的集合或商集 A/R 是一个环，简单一些就记成 $\bar{A}$．设 $\bar{x}$ 是包含 A 的元 x 的等价类．映射 $x\to\bar{x}$ 是把 A 映成 $\bar{A}$ 的映射($\bar{A}$ 的每个元 $\bar{x}$ 至少是 A 的一个元的像)；并且这映射还保持 A 与 $\bar{A}$ 的加法与乘法，即

$$\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y},\quad \overline{xy}=\bar{x}\bar{y}.$$

具有上述性质的任何映射 $A\to\bar{A}$ 称为(环的)同态映射；环 $\bar{A}$ 叫作与 A 同态，也叫做 A 的同态像，记为

$$A\sim\bar{A}.$$

因此，A 内每一同余关系 R 都产生一个与 A 同态的环 $\bar{A}$，也就是商环 A/R.

考察 A 的元素 0 所属的等价类 $\bar{0}$，$\bar{0}$ 显然是环 A/R 的零元，但同时又是 A 的一个子集合 M，具有如下两个重要性质：

1° M 是 A 的加法子群；事实上，由定义 M 包含 0，又 x，$y\in M$ 蕴涵 $x+y$，$-x$ 也 $\in M$．(利用一个群的子群 M 的简单特性，可以更简捷地验明 x，$y\in M$ 蕴涵 $x-y\in M$[注].

2° A 对 M 可以施行乘法，即对任意的 $a\in A$ $m\in M$ 必有 $am\in M$ 这是因为 $am\equiv a0=0(R)$.

因为 R 关于加法是正规的，所以 $x\equiv y(R)$ 与 $x-y\equiv 0(R)$，即 $x-y\in M$ 同时成立．若已知零类 M 由此可得同余关系 R.

交换环 A 的一个子集如果具有上述性质 1° 与 2°，则称

[注]　例如参见[2]，p. 108.

为理想；按照上面的论证，一个同余关系 R 的零类就是理想．反之，假定先有 A 的一理想 M；如果 A 的两个元素 x 与 y 满足 $x-y\in M$，就定义 x 与 y 有关系 R，则 R 显然是一等价关系，并且关于 A 的加法与乘法是正规的，所以 R 是一同余关系，其零类恰好是 M．

这样，交换环 A 的所有理想 M 与所有同余关系 R 成一一对应．因此，商环 A/R 可写成 A/M．

现在假定先有环的同态映射：

$$A\to\overline{A},$$

在这映射下，A 的元 x 以 $\overline{A}$ 的元 $\bar{x}$ 作为像．对于 A 的两个元素 x 与 y，我们说 x 与 y 有关系 R，如果 $\bar{x}=\bar{y}$．容易验明，R 是一个等价关系（称为同态等价），并且是一同余关系．于是可以构造出商环 A/R．按作法，关于 R 的等价类，即是 A/R 的元素，与 $\overline{A}$ 的元成一一对应．因为这个一一对应保持加法与乘法，所以是同构映射．因此，$\overline{A}$ 与商环 $A/R=A/M$ 同构．理想 M 或模 R 零类是 A 的这样一些元素的集合，它们被这个同态映射映成 $\overline{A}$ 的零元素（我们说 M 是这个同态映射的核）．

所以，在同构的意义下，A 的同余关系，即是 A 的理想就确定了所有与 A 同态的环．

6．特殊情形与例子

在交换环 A 的理想所成的集合中，定义如下运算：交（在集合论的意义下）；和以及积．A 的两个理想 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 的和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 是形如 $a+b$ 的元素所成的集合，这里 $a\in\mathfrak{a}$，$b\in\mathfrak{b}$．这显然是包含 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 的理想．积 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ 是由积 ab 生成的理想，即和 a_1b_1

$+\cdots+a_rb_r$(r 不固定)的集合，这里 $a_i\in\mathfrak{a}$，$b_i\in\mathfrak{b}$．为避免累赘，关于理想的运算，我们不多介绍，其实它们是很重要的[注]，而且可以据以定义商以及剩余．

现在让我们只讨论一种基本的生成方式；为简便计，假定环 A 具有单位元 e．

在环 A 中取定 h 个元素 $a_1, \cdots, a_h$，容易验明，形如 $a=x_1a_1+\cdots+x_ha_h$ ($x_i\in A$)的元素的集合是一个理想 $\mathfrak{a}$，记为

$$\mathfrak{a}=(a_1, \cdots, a_h).$$

我们说，$\mathfrak{a}$ 是由 a_i 生成的，$a_1, \cdots, a_h$ 是它的(有限)基．由一个元素生成的任何理想 $\mathfrak{a}=(a)$ 叫做*主理想*．单位元 e 生成的主理想 (e) 就是环 A，这个理想常叫*单位理想*．元素 0 生成的主理想就是 0，称为*零理想*．

在体 K 内，只有零理想与单位理想。事实上，设 M 是 K 的理想；$M\neq 0$．于是 M 至少含有一个元 $a\neq 0$；因 K 是体，故这个元素 a 有逆元素 a^{-1}，因之 $e=a^{-1}a\in M$ 故 $K=(e)$ 含于 M，由此 $M=K=(e)$．

在整数环 C 内，以及在系数属于体 k 的 x 的多项式环 $k[x]$ 内，所有的理想都是主理想。

就环 $k[x]$ 为例证明上述结论．零理想当然是主理想．今设 $\mathfrak{a}\neq(0)$ 是一理想，f 是 $\mathfrak{a}$ 中一个最低次的非零多项式，g 是 $\mathfrak{a}$ 中任一多项式．用 f 除 g：$g=qf+r$ 这里，r 的次数低于 f 的次数．多项式 r 属于理想 $\mathfrak{a}$，故必为零多项式，所以 g 属于主理想 (f)，从而 $(f)=\mathfrak{a}$．

对于整数环 C，证明类似：在这个环内，除模 m 确定的算术同余外，不存在别的同余关系；m 是与算术同余相应的主理

[注] 例如见[2]，第 IV 章，§ 11，p. 188；[3]，§ 17，p. 57～59 和 § 85，t. 2 p. 22～25．

想的生成元.

一个环,如果其中存在带剩余的除法,就叫欧氏环; 一个环的每个理想如果都是主理想,就叫主理想环(简称主环). 前面的论证不难推广: 每个欧氏环都是主理想环. 高斯整数环也是欧氏环(为定义带剩余的除法, 利用元素 $\alpha=a+ib$ 的范数 $N(\alpha)$ 而范数 $N(\alpha)$ 的定义是 $N(\alpha)=a^2+b^2$, 在未定元的多项式除法中起次数的作用).

多个未定元的多项式环 A 例如 $\Gamma[x, y]$, $\Omega[x, y]$, 不再是主理想环: 事实上, 理想 (x, y) 不可能有唯一的生成元; 注意, 这个理想有一个简单的几何意义: 它是 A 中在原点为零的多项式的集合. 设 K 是任一体, n 元多项式环 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中, 理想的生成遵从一个简单的法则: 在这样的环中, 每个理想都有有限基. 具有这种性质的环, 称为诺特环(诺特是德国女数学家 Emmy Noether 的姓. 她利用"极大条件"与"因子链的公理"给出了另一些公理定义, 并得到诺特环中理想理论的基本结果).

刚才提到的"环 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 是诺特环"的定理是希尔伯特得到的. 确切点说, 这是一类"迁移定理"的一种表现形式: 具有单位元的环 A 如果是诺特环, 则 $A[x]$ 也是诺特环[注].

7. 一些重要的理想

交换环 A 的诸理想 M 中, 使得相应的商环即是剩余类环 A/M 具有重要性质的理想, 自然更应重视. 让我们来研究使 A/M 是体或整域的理想 M.

理想 M 称为无因子理想或极大理想, 如果 A 是唯一的

[注] 参见[2], 第 VI 章, § 5, p.331.

严格包含 M 的理想. 我们有下述定理:

欲使 A/M 是体, M 必须是无因子理想. 若 A 具有单位元, 这必要条件还是充分的.

证明 1° 设 A/M 是体.

令 M' 是严格包含 M 的理想: $M\subset M'$. 设 $a\in M'$, $a\notin M$(不属于 M). 用 $\bar{a}$ 表示包含 a 的等价类: $\bar{a}$ 不是零类 $M=\bar{0}\in A/M$. 因此, 若 x 是 A 的任意元素, $\bar{x}$ 是含有 x 的等价类. 则存在 $\bar{y}(=\overline{a^{-1}}\bar{x})$, 使得 $\bar{x}=\bar{a}\bar{y}$, 从而若 y 表示 A 中属于等价类 $\bar{y}$ 的一个元素, 则

$$x\equiv ay \quad (M).$$

换言之: $$x=ay+m,\ m\in M\subset M',$$

从 $a\in M'$ 得 $x\in M'$, 故 $A=M'$; M 是无因子理想.

2° 设 A 具有单位元 e, M是无因子理想. 为了证明 A/M 是体, 只需证明每个不是 $\bar{0}=M$ 的等价类 $\bar{a}$ 都有逆元. 属于类 $\bar{a}$ 的元素 a 不属于 M: 理想 $M+(a)$严格包含 M, 由此

$$M+(a)=A.$$

特别, 单位元 e 也属于左端, 即存在 $m\in M$, $r\in A$, 使得:

$$e=m+ra.$$

由此, 取模m等价类, 便得

$$\bar{r}\bar{a}=\bar{e} \quad 即\ \bar{r}=\bar{a}^{-1}.$$

上述定理有如下的重要应用. 考虑体 K 以及环 $K[x]=A$ 的既约多项式 $f(x)$ 即 $f(x)$不是同一环内次数起码为 1 的两个多项式的积. A 中的主理想 (f) 是无因子理想, 故 $A/(f)$是体, 记为 K'. 因 K 的两个相异元不能模 f 同余, 故含有K中元素的等价类与 K 的元成一一对应; 这些等价类构成一个与 K 同构的体, 将这个体与 K 等同, 于是 K 是 K' 的子体.

若 α 是含有多项式 x 的等价类，则 $f(\alpha)$ 是含有多项式 $f(x)$ 的等价类[根据同态映射 $A \sim A/(f)$]；但含有 $f(x)$ 的等价类是 K' 的零元素．故在 K' 内有 $f(\alpha)=0$ 这样，我们就构造出一个体 K'，在其中 $f(x)=0$ 至少有一个根．本质上讲，这就是符号添加法．

环 A 的理想 $\mathfrak{p}$ 如果使得环 $A/\mathfrak{p}$ 是整域，就叫做素理想．$\mathfrak{p}$ 为素理想的充要条件是：在 $A/\mathfrak{p}=\bar{A}$ 内下列关系成立：

$$\bar{x} \neq \bar{0},\ \bar{y} \neq \bar{0} \quad \text{蕴涵} \quad \overline{xy} \neq \bar{0},$$

所以在 A 内 $\quad x \notin \mathfrak{p},\ y \notin \mathfrak{p}$，蕴涵 $xy \notin \mathfrak{p}$，

这表明补集合 $A-\mathfrak{p}$ 是乘法封闭的．

素理想这个概念在代数理论本身以及算术、几何的应用中，都是极重要的．

我们只指出，在有单位元的环 A 内，每个无因子理想 M 都是素理想(事实上，A/M 是体，因而是整域)．

最后，作为例子，考虑复系数三元多项式环 $A=\Omega[x, y, z]$，以及理想：

$$\mathfrak{a}_1=(x, y, z),\quad \mathfrak{a}_2=(x, y),\quad \mathfrak{a}_3=(x).$$

$A/\mathfrak{a}_1$ 与 Ω 同构，所以是体；$A/\mathfrak{a}_2$ 与多项式环 $\Omega[z]$ 同构，$\Omega[z]$ 是整域；$A/\mathfrak{a}_3$ 与多项式环 $\Omega[y, z]$ 同构，也是整域．诸理想 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ 满足下列包含关系：

$$\mathfrak{a}_3 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1 \subset A=(1),$$

每一个都是素理想，$\mathfrak{a}_1$ 还是无因子理想．

参 考 文 献

[1] N. Bourbaki, «Algèbre», Chap. I, Hermann, Paris, 1942.

[2] P. Dubreil, «Algèbre», t. I, 2ᵉéd., Gauthier-Villars, Paris, 1954.

[3] B. L. van der Waerden, «Moderne Algebra», 2ᵉ ed., Springer, Berlin.

第三讲 向量空间，线性形式与线性方程

G. Choquet （索尔本大学教授）

1. 向 量 空 间

中等教育的许多材料已涉及到向量的概念：平移的合成、速度的合成、力的合成；纯量积，向量积，一个向量关于一点的矩，再往后，就是一些隐约可见的代数形式，例如多项式、线性形式等．因之，使用向量这个字眼，其含意并不总是一样的：时而是约束向量，时而是滑动向量，时而又是自由向量．

本文只讨论自由向量．

我们常常利用向量的几何表示，即是一端带有箭头的直线段，这可能使我们以为，可以孤立地考虑一个向量，而不管别的向量如何，尽管如此，但不久我们就会看到，要把一个数学对象叫做向量，它必须和另一些相似的对象共同组成一个集合，可以对这个集合施行某些有精确定义的运算．

这些对象之所以能够叫做向量，正是由于这些运算的本性，而不是每个对象的个别特性．例如多项式，连续函数，方阵可以叫做向量，正是这个道理．

含混地说，数学对象构成的一个集合可以叫做向量的集合，如果我们能在该集合中把两个向量相加，同时又可用任何一个数去乘每个向量．

精确一点，我们给出下面的定义．

定义 实数体 R 上的向量空间是指一个集合 E，满足下

述条件:

1) E 上定义了一个内合成法则[注], 叫做加法, E 关于加法成为交换群;

2) E 上定义了一个外合成法则: 对于每个数 $\lambda\in R$ 与每个 $x\in E$, 相应地给出 E 的一个元 λx, 使得

a) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

b) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$,

c) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,

d) $1\cdot x=x$.

集合 E 的元叫向量; R 的元叫纯量.

R 的 0 与群 E 的零元素, 显然并非同一元素, 但我们同时用 0 表示.

从上面的关系 a)、b)、c)、d) 容易得出如下关系:

$$0x=0;\ \lambda 0=0;\ (-\lambda)x=\lambda(-x)=-\lambda x.$$

关系 a)、b)、c)、d) 只涉及 R 上存在加法与乘法; 因此, 似乎也可定义环 A 上的向量空间, 这个环 A 起前面定义中 R 的作用. 不过, 只有当环 A 是一个体时, 才能得到与 R 上的向量空间类似的理论. 这主要是因为, A 是一个体时, 关系 $\lambda x=0$ 蕴涵 $\lambda=0$ 或 $x=0$, 但若 A 仅为一个环, 上述蕴涵关系未必定成.

最常用的体有实数体 R 与复数体 C.

上面向量空间的定义中, 没有用到体 R 具有序结构这一事实. 只有当人们希望在(R 上的)向量空间 E 中定义半直线以及区间的概念, 从而可以谈凸集时, 才涉及序结构. 正是这个事实, 才使 R 上的向量空间具有一种特殊的作用. 本文不

[注] 参见 H. Cartan 关于代数结构的讲演. 由于 E 是交换群, 所以用 $x+y$ 表示 x 与 y 的合成, $-x$ 表示 x 的反元.

打算引入半直线与凸集的概念.

向量空间的例子

1) n 个实数所成序列 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 的集合是 R 上的向量空间, 只要令

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$
$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

这个空间就是欧氏空间 R^n.

特别是 $n=1$ 时, R 自身可看成 R 上的向量空间.

2) 定义在区间 $[0, 1]$ 上的数值函数的集合是 R 上的向量空间, 只要定义 $h=f+g$ 与 $k=\lambda f$ 为: 对每个 $x\in[0, 1]$

$$h(x)=f(x)+g(x) \quad k(x)=\lambda f(x).$$

这个空间的下列子集合也是 R 上的向量空间: $[0, 1]$ 上的连续函数的集合. $[0, 1]$ 上的无限可微函数的集合; 多项式(或者 n 次多项式)的集合; 三角多项式的集合, 等等.

3) 复平面 C 上的正则解析函数的集合是体 C 上的向量空间.

要确认一个集合是否为向量空间, 并非都是一样容易的事. 例如, 考虑 $[0, 1]$ 上的连续函数的集合, 其中每个函数的表示曲线均有有限长度. 两个这样的函数的和是否仍有同样的性质, 并不显然. 又如, 令 E 是实数的无限序列 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 所成的集合, 每个序列都满足

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\cdots<+\infty.$$

要确认两个这种序列的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n, \cdots)$ 仍有同样的性质, 也不显然.

同构的概念

设 E 是次数 $<n$ 的实系数多项式所成的向量空间. 若 $p=(a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n)$ 是 E 的元, 注意 p 由其系数所

成的序列$(a_1, \cdots, a_n)$决定，由此可以定义 E 与 R^n 之间的一一对应：

$$p \leftrightarrow (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

这对应还保持加法与纯量乘法．所以，可以认为，E 与 R^n 是同一个代数结构的两个不同实现；这一事实，可以说成两个空间 E 与 R^n 同构．更一般有如下定义：

定义 设 E 与 E' 是同一个体K上的向量空间．每一个把E 映成 E' 的一一映射 f 称为把 E 映成 E' 的同构映射，如果对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\lambda \in K$ 有

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \ f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}).$$

显然，把 E' 映成 E 的逆映射 f^{-1} 也有同样的性质．

如果在 E 与 E' 之间存在这样的同构映射，就说 E 与 E' 同构．

注意，从条件$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$可推得对每个有理数 λ, $f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$；但对任意的纯量 α，不能推出这关系．因之，上述定义中的第二个条件才是主要的．

同构映射的例子

1) 设 E 是向量空间，λ 是纯量 $\neq 0$．把 E 映成 E 本身的映射 $\boldsymbol{x} \to \lambda \boldsymbol{x}$ 是同构映射，称为以 0 为中心、以 λ 为比例常数的位似．

2) 设 E_1 是$[0, 1]$上的连续函数的向量空间，E_2 是 $[0, 1]$ 上当 $x=0$ 时为零的连续可微函数的向量空间．由初等分析的一个定理知这两个空间同构．

3) 定义在 R^2 上的线性函数具有 $a_1x_1 + a_2x_2$ 的形式，因此，立即得：这类函数的集合是同构于 R^2 的向量空间．

4) $[0, 1]$上的连续函数空间同构于$(-\infty, +\infty)$上连续，并且当 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$趋于有限极限的函

数 f 的空间.

5) 在 R 上连续且周期为 1 的周期函数的空间同构于定义在一圆周上的连续函数的空间.

向量空间的积

从 R 出发定义 R^n 所用的方法可以推广，这使我们可以从已知的空间构造出新的空间.

例如，设 E_1 与 E_2 是 R 上的两个向量空间. 用 $E_1\times E_2$ 表示偶对 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ 的集合，这里 $\boldsymbol{x}_1\in E_1$, $\boldsymbol{x}_2\in E_2$. 若 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$，我们令：

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2),\ \lambda\boldsymbol{x}=(\lambda\boldsymbol{x}_1, \lambda\boldsymbol{x}_2).$$

具有如上运算的集合 $E_1\times E_2$ 就成为 R 上的向量空间，称为 E_1 与 E_2 的积.

同样可定义任意一族有限个乃至无限个向量空间的积.

例子 1) 定义在 R^2 上的形如 $h(x_1, x_2)=f(x_1)+g(x_2)$ [注]，且 $f(0)=g(0)=0$ 的函数 $h(x_1, x_2)$ 的空间同构于定义在 R 上且 $f(0)=0$ 的函数 f 所成空间的自乘.

2) $[0, 1]$ 上连续可微函数的空间同构于 R 与 $[0, 1]$ 上连续函数空间的积.

向量子空间. 一个子集生成的子空间

在 R^3 中，非 0 的向量子空间是通过原点的诸直线与平面.

在一个变元的多项式空间中，n 次多项式的集合，可以被一个已知多项式整除的多项式的集合，以及只有偶次项的多项式的集合，都是向量子空间. 一般有如下定义.

定义 设 E 是向量空间. 如果 E 的子集 A 满足：$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}\in A$ 蕴涵 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in A$ 以及对任意纯量 λ, $\lambda\boldsymbol{x}\in A$，就称 A 是

[注] 原文作 $f(x_2)$, $h(0, 0)=0$ 不妥. 同构对应是 $h\leftrightarrow(f, g)$. 若 $h=f+f$ 不能映成所说的自乘空间. ——译者注

E 的向量子空间.

显然, E 的每个向量子空间都是 E 的加法子群.

另一面, 若 $(A_i)_{i\in I}$ 表示 E 的一族向量子空间, 则属于每个 A_i 的元素的集合, 即诸 A_i 的交集合, 仍为 E 的向量子空间.

特别, 命 X 为 E 的任一子集. E 中包含 X 的向量子空间, 除 E 外可能还有别的; 所有这些向量子空间的交集 $A(X)$ 显然是 E 中包含 X 的最小向量子空间, 我们说 $A(X)$ 是 X 生成的向量子空间.

现在引入一个新概念来确定 X 的元素的性质:

定义 命 X 是向量空间 E 的子集合. E 中每个形如 $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in I}\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ 的元称为 X 的元素的线性组合, 这里 $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in I}$ 是 X 中一族有限多个元素, 而诸 λ_i 是纯量.

X 的元素的任何线性组合都属于包含 X 的任何向量子空间, 特别是属于 $A(X)$; 另一面, 所有的线性组合显然构成 E 的一个向量子空间; 这个子空间包含 X, 所以也包含 $A(X)$, 它又含于 $A(X)$, 因此两者恒同. 换言之:

E 的子集 X 生成的子空间 $A(X)$ 恒同于 X 的元素的线性组合构成的集合.

互补子空间

在 R^3 中, 平面与从原点出发且与平面只在原点相交的直线是互补子空间的例子.

定义 X_1 与 X_2 是 E 的两个子空间, 如果 E 的每个点 $\boldsymbol{x}$ 都能唯一地写成

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_1\in X_1,\ \boldsymbol{x}_2\in X_2,$$

就说 X_1 与 X_2 **互补**.

容易验明, 上述条件相当于 $(X_1\cup X_2)$ 生成 E 且 $X_1\cap$

$X_2=\{0\}$.

我们说，$\boldsymbol{x}_1$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 X_1 中的分量，或者说 $\boldsymbol{x}_1$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 X_1 上平行于 X_2 的投影.

若记 $\boldsymbol{x}_1=\mathrm{pr}_1\boldsymbol{x}$，则可验证

$$\mathrm{pr}_1(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\mathrm{pr}_1\boldsymbol{x}+\mathrm{pr}_1\boldsymbol{y},\ \mathrm{pr}_1(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda\mathrm{pr}_1\boldsymbol{x}.$$

例子 1) E 是 x 的实系数多项式集合；X_1 是能被 x^2+1 整除的多项式集合；X_2 是次数不高于 1 的多项式集合.

2) E 是 R 上的函数空间；X_1 是偶函数($f(-x)=f(x)$)构成的子空间；X_2是奇函数($f(-x)=-f(x)$)构成的子空间.

在空间 R^3 中，一个平面的互补子空间全都是直线，就是说，互补子空间总是同构的，这是如下一般命题的特例：

命题 在向量空间 E 中，若 X_2 与 X_2' 是同一子空间 X_1 的两个互补子空间，则平行于 X_1 的投影是 X_2 与 X_2' 之间的同构映射.

证明 对每个 $\boldsymbol{x}_2'\in X_2'$，$\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_1$. 这里 $\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{x}_2'$ 在 X_2 上平行于 X_1 的投影. 但这个等式也可写成 $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_2'+(-\boldsymbol{x}_1)$. 故 $\boldsymbol{x}_2'$ 又是 $\boldsymbol{x}_2$ 在 X_2' 上平行于 X_1 的投影.

因此，如上的(投影)映射 $\boldsymbol{x}_2\to\boldsymbol{x}_2'$ 是把 X_2 映成 X_2' 的一一映射；因为是投影，也有

$$(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)'=\boldsymbol{x}_2'+\boldsymbol{y}_2',\ (\lambda\boldsymbol{x}_2)'=\lambda\boldsymbol{x}_2'.$$

故这是同构映射.

2. 线性无关. 基底

几何中，讨论把 R^3 的一个向量沿着三个已知向量的方向进行分解时，已碰见过线性无关的概念；在代数中，研究线性方程组的可解条件时也碰见这个概念. 我们要说明，这个概

念怎样才能不依赖于所研究向量的性质而且与坐标系的特殊选取无关.

定义 向量空间 E 的一族有限多个元素 $(\boldsymbol{a}_i)_{i\in I}$ 叫做自由的, 如果每一关系 $\sum_{i\in I}\lambda_i\boldsymbol{a}_i=0$ 蕴涵对每个 i 有 $\lambda_i=0$.

如果一族任意多个向量的每一个有限子族都是自由的, 就说该向量族是自由的.

非自由的族叫做约束族.

若一个族是约束族, 则存在形如 $\sum_{i\in I}\lambda_i\boldsymbol{a}_i=0$ 的一个关系, 其中有一个 $\lambda_i\neq 0$; 例如 $\lambda_0\neq 0$ 时, 可得 $\boldsymbol{a}_0=\sum_{i\in J-0}\mu_i\boldsymbol{a}_i$. 反之, 只要这样的关系成立该族必是约束的. 故:

一个族是约束族等价于其中有一个元素是其余元素的线性组合.

自由族的诸元称为线性无关的; 约束族的诸元则称为线性相关的.

同样可定义向量空间的自由子集或约束子集的概念.

例子 在 R 上的函数空间中, 单项式序列 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 是自由的; 序列 $\sin x, \cdots, \sin nx, \cdots$ 也是如此.

基底的定义 向量空间 E 中生成 E 的任何自由子集称为 E 的基底.

若 $B=(\boldsymbol{a}_i)_{i\in I}$ 是 E 的一个基底, 每个 $\boldsymbol{x}\in E$ 唯一地表成 $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in I}x_i\boldsymbol{a}_i$, 这里诸纯量 x_i 中, 除有限个外均为零; x_i 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标, $x_i\boldsymbol{a}_i$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 分量.

例如, 在 R^n 中, n 个元素 $\boldsymbol{a}_i=(x_1, \cdots, x_n)$ ($x_i=1$, 其余为 0) 的集合就是一个基底. 在多项式空间中, 单项式 $1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 的集合是一个基底.

可以证明，每一向量空间至少有一个基底；下面仅就有限维空间证明这个事实.

有限维空间的基底

空间 E 如果包含一个生成它的有限子集，就叫有限维的这个有限子集也叫做有限生成组.

有限维空间的研究取决于下列定理：

定理 1 若 G 是向量空间 E 的有限生成组，L 是 G 的自由子集，则存在 E 的一个基底 B，使得 $L\subset B\subset G$.

命 $L=L_0$，假设已确定了 G 的自由子集 L_p. 若 L_p 不生成 E，则存在 G 的元素 x_{p+1} 不是 L_p 的元素的线性组合. G 的子集 $L_p\cup\{x_{p+1}\}$ 显然是自由的，记为 L_{p+1}.

于是我们有 $L_0\subset L_1\cdots\subset L_p\subset L_{p+1}$ 这序列严格递增；因 $L_p\subset G$，而 G 有限，所以这序列有限. 因此，存在一个 L_n 无后继的 L_{n+1}；换言之，L_n 生成 E，这 L_n 就是所求的基底 B.

定理 2 若 G 是 E 的有限生成组，L是E的自由子集(不必含于 G)，则存在 E 的一个基底 B 包含 L 并含于 $G\cup L$.

将定理 1 用于自由子集 L 与生成组$(G\cup L)$即得. 特别，E 的每个有限生成组均包含一个基底.

因此，每个有限维向量空间都具有有限基底. 另外，这样的空间不能有无限基底，这一点并不明显，不过确实无误，更确切地说，利用定理 2，使用归纳法可以证明，在有限维空间中，每个基底都是有限的，并且含有同样多个元素.

这个共同的个数称为空间的维数. 注意，这个结论对于任意体 K 上的向量空间E 也成立. 不过，要紧的是要确切说明有关的体 K. 事实上，若 E 是体 C 上的 n 维向量空间，空间 E 也可视为体 R 上的向量空间，但后者的维数不再是 n，而是 $2n$；例如，C 视为 C 自身上的向量空间是 1 维，但视为 R

上的向量空间便是 2 维.

上述结果有许多明显的推论, 今列其最重要者如下:

1) 要使 R 上两个有限维向量空间 E 与 E' 同构, 充要条件是它们的维数相等. 特别, 每个 n 维向量空间都与 R^n 同构.

2) 设 E 是 n 维向量空间, 则

a) E 的每个生成组至少含有 n 个元素; 若恰好含有 n 个元, 它就是一个基底.

b) E 的每个自由子集至多含有 n 个元; 若恰好含有 n 个元, 它就是一个基底.

c) E 的每个向量子空间 V 至多是 n 维; 若它是 n 维, 就是 E 本身.

d) E 的每个异于 E 的向量子空间都有互补的子空间, 这两个互补子空间维数的和等于 E 的维数 n.

3. 线性映射

在古典分析与现代分析中, 占主导地位的概念之一是线性函数的概念, 这个概念只是在向量空间的范围内才表现出它的全部意义.

定义 若 E 与 F 是在同一体 K 上的两个向量空间. 把 E 映入 F 的线性映射, 是指把 E 映入 F 的任何映射 f, 使得对任何 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E$, $\lambda \in K$, 有

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}), f(\lambda \boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x}).$$

例如, 把 E 映成 F 的同构映射不外乎就是把 E 映成 F 的一一线性映射.

线性映射的例子

1) E 是向量空间 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 的积. 对于 E 中任何

$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_i)$，把 E 映成 E_i 的映射 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_i$ 是线性的．

2）若 X_1 与 X_2 是空间 E 的两个互补子空间，把 E 映成 X_1 的映射 $\boldsymbol{x}\to \mathrm{pr}_1\,\boldsymbol{x}$ 是线性映射．

3）令 P_n 是一个变元的 n 次多项式 $p(x)$ 构成的向量空间．若 $f(p)$ 表示 p 的 n 次项，则把 P_n 映入 P_n 的映射 f 是线性映射．

4）令 E 是[0, 1]上的可微实函数 $x(t)$ 构成的空间，用 x' 表示函数 x 的导数：

a）把 E 映入 R 的映射 $x\to x'(\frac{1}{2})$ 是线性映射．

b）把 E 映入[0, 1]上的数值函数构成的空间的映射 $x\to x'$ 是线性映射．

5）令 E 是[0, 1]上的实连续函数空间：

a）定义 $X(t)=\int_0^t x(u)du$，每个 x 都有其相应的 X，映射 $x\to X$ 是把 E 映入 E 的线性映射．

b）把 E 映入 R 的映射 $x\to\int_0^1 x(u)du$ 是线性映射．

6）令 E 是定义在圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的连续函数空间；F 是定义在该圆周界上的连续函数空间．考虑 E 的元素 φ 在圆周上的限制，这个对应关系是把 E 映入 F 的线性映射．

一些明显的性质 其中最重要者列出如下：

1）**传递性** 若 f 把 E 映入 F，g 把 F 映入 G 则当 f 与 g 是线性映射时，由 $h(x)=g(f(x))$ 定义的映射 $h=g\circ f$ 是线性的．

2）若 f 是把 E 映入 F 的线性映射，则 E 的像 $f(E)$ 是 F 的向量子空间，F 的任一向量子空间 V 的逆像 $f^{-1}(V)$ 是 E 的向量子空间．

线性映射的秩

f 是把 E 映入 F 的线性映射，E 的像 $f(E)$ 的维数称为 f 的秩. 下述命题常用来确定秩:

f 的秩等于 E 中与 $f^{-1}(0)$ 互补的子空间的维数.

事实上，令 G 是与 $f^{-1}(0)$（即是 $f(x)=0$ 的根的集合）互补的子空间.

对于每个 $x\in E$ 有唯一分解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1$，这里 $\boldsymbol{x}_0\in f^{-1}(0)$，$\boldsymbol{x}_1\in G$.

我们有 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+f(\boldsymbol{x}_1)=f(\boldsymbol{x}_1)$; 故 $f(G)=f(E)$.

然而，对每一 $\boldsymbol{x}\in G$，只要 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 必有 $f(\boldsymbol{x})\neq 0$. 故 f 在 G 上的限制是把 G 映成 $f(E)$ 的一一映射; 所以这个限制是 G 与 $f(E)$ 之间的同构映射，由此命题得证.

推论 线性映射决不增大维数: 当 E 有限维时，欲使 $f(E)$ 与 E 维数相等，充要条件是 f 是一一的.

这个推论刻划了线性映射的一个重要性质，这个性质并非每个连续映射都具有的，因为某些连续映射要增大维数.

生成组的像

设 f 是把 E 映入 F 的线性映射，X 是 E 的子集.

显然，X 生成的空间 $A(X)$ 的像 $f(A(X))$ 由 $f(x)$ 生成; 当 X 生成 E 时，f 完全由它在 X 上的限制所确定. 特别若 X 是 E 的基底，只要对这个基底的每个元素 $\boldsymbol{x}$ 确定了 $f(\boldsymbol{x})$，那么 f 就完全确定了.

4. 线性形式，向量空间的对偶空间

设 E 是体 K 上的向量空间，把 E 映入 K 的任何线性映射，称为 E 上的一个线性形式.

E 上所有线性形式的集合，可以自然地具有(K 上)向量空间的结构，定义如下：

设 f 与 g 是两个线性形式，定义形式 $h=f+g$ 与 $k=\lambda f$ ($\lambda\in K$)如下：对每个 $\boldsymbol{x}\in E$,

$$h(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}),\ k(\boldsymbol{x})=\lambda f(\boldsymbol{x}).$$

如上得到的向量空间称为 E 的对偶空间，记成 E^*.

对每个 $\boldsymbol{x}'\in E^*$, $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})$是一个纯量，一般记为$\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\rangle$.

对于每个固定的 $\boldsymbol{x}'$, $\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\rangle$是 E 上的线性形式. 对于每个固定的 $\boldsymbol{x}$, $\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\rangle$是 E^* 上的线性形式. 也说$\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\rangle$是定义在 $E\times E^*$ 上的典范双线性形式.

坐标形式. 对偶基

我们限于讨论有限维空间.

设 E 是 n 维向量空间，$(\boldsymbol{a}_i)_{i\in I}$ 是 E 的基底. E 的每个 $\boldsymbol{x}$ 唯一地写成 $\boldsymbol{x}=\sum\xi_i\boldsymbol{a}_i$.

把 E 映入 K 的映射 $\boldsymbol{x}\to\xi_i$ 是线性的，所以是一个线性形式，记作 $\boldsymbol{a}'_i$，称为关于所选取基底的第 i 个坐标形式.

$(\boldsymbol{a}'_i)_{i\in I}$ 构成 E^* 的一个基底，称为 E 的基底$(\boldsymbol{a}_i)_{i\in I}$ 的对偶基. 事实上，对于每个 $\boldsymbol{x}'\in E^*$，我们有：

$$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x})=\sum\boldsymbol{x}'(\xi_i\boldsymbol{a}_i)=\sum\xi_i\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i)=\sum\boldsymbol{a}'_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i),\quad(1)$$

或者 $\quad\boldsymbol{x}'=\sum\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}'_i$.

这表明诸 $\boldsymbol{a}_i$ 生成 E^*；另一方面，诸 $\boldsymbol{a}_i$ 又是无关的，这是因为，关系 $\sum\lambda_i\boldsymbol{a}'_i=0$ 等价于对每个族 $(\xi_i)_{i\in I}$ 有 $\sum\lambda_i\xi_i=0$，所以，对每个 i 有 $\lambda_i=0$.

若令 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{a}_i)=\xi'_i$，即 $\boldsymbol{x}'=\sum\xi'_i\boldsymbol{a}'_i$，则公式(1)表明

$$\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\rangle=\sum\xi_i\xi'_i.\qquad(2)$$

当我们在 E 与 E^* 中考虑两个对偶基时，公式(2)就是$\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\rangle$的标准形式. 这不外是欧氏空间上线性函数的熟知

形式，例如，$f=ax+by+cz$. 因此有如下结论：

若 E 是 n 维空间，则 E^* 也是. 又若选取 E 与 E^* 的两个对偶基，则 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xi'_i$.

5. 线 性 方 程

我们所处理的最一般的形式，可以使代数与分析中的许多问题变得形式简单.

定义 设 E 与 F 是同一体 K 上的两个向量空间. 每个形如 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 的方程称为线性方程，这里，f 是把 E 映入 F 的线性映射，$\boldsymbol{y}_0$ 是 F 中的已知元.

E 中每个使得 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 的元素 $\boldsymbol{x}$ 叫这个方程的解.

方程 $f(\boldsymbol{x})=0$ 叫对应于已知方程 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 的齐次方程. $\boldsymbol{y}_0$ 称为已知方程的右端.

每个右端为零的线性方程称为齐次线性方程.

例子 1) E 是定义在开圆盘 $u^2+v^2<1$ 中，且具有各阶偏导数的函数构成的空间，F 就是 E. 映射 f 是一个微分算子；例如，f 是拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}$. 这时，方程 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 不外就是非齐次的线性偏微分方程.

2) E 是在闭圆盘 $u^2+v^2\leqslant 1$ 上连续且在圆盘内部调和的函数构成的空间. F 是相应圆周上的连续函数构成的空间. 取映射 f：对每个 $\varphi\in E$，使 φ 在圆周上的限制与之对应. 求函数 φ，使得 $f(\varphi)=y_0$，这里 $y_0\in F$，也就是对于函数 y_0 求解狄利希勒问题.

3) E 是 $[0, 1]$ 上的连续函数 $x(t)$ 的空间，$F=E$. 若 $\phi(u, v)$ 表示正方形 $0\leqslant u, v\leqslant 1$ 上的一连续函数，f 是把 E

映入 F 的映射，定义为

$$f(x)(t)=\int_0^1\phi(t,\ \tau)x(\tau)d\tau.$$

方程 $f(x)=b$, $b\in F$, 不过是积分方程

$$\int_0^1\phi(t,\ \tau)x(\tau)d\tau=b(t).$$

线性方程的解的形式

定理 设 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 是一线性方程. 若 $\boldsymbol{x}_0$ 是这方程的任一解, 那么, 把对应齐次方程的任意解与 $\boldsymbol{x}_0$ 相加就得到 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}_0$ 的全部解. 因此, 解的集合是仿射簇 $\boldsymbol{x}_0+f^{-1}(\mathbf{0})$, 由 E 的向量子空间 $f^{-1}(\mathbf{0})$ 平移 $\boldsymbol{x}_0$ 而得.

欲使方程至多只有一个解，充要条件是 $f^{-1}(\mathbf{0})=\{\mathbf{0}\}$，所以, f 是把 E 映成 $f(E)$ 的同构映射.

上述结论的证明是明显的.

方程组 一个线性方程常可表成线性方程组形式.

设 E 是向量空间, $(F_i)_{i\in I}$ 是一族有限或无限多个向量空间, 对每一 $i\in I$, 令 f_i 是把 E 映入 F_i 的线性映射.

方程族 $(f_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}_i)_{i\in I}$, $\boldsymbol{b}_i\in F_i$, 称为线性方程组. 这个方程组的解是指该组内所有方程的公共解.

这样的方程组等价于一个线性方程. 事实上, 设 F 是诸 F_i 的积空间; $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_i)$, f 是把 E 映入 F 的映射, 它的分量是 f_i. 方程 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}$ 就等价于所给的方程组.

反之, 一个线性方程也可以换成方程组. 例如, 设 F 是 q 维空间, $(\boldsymbol{b}_j)_{j\in J}$ 是 F 的基底; 对每个 $\boldsymbol{y}\in F$, 有 $\boldsymbol{y}=\sum\beta_j\boldsymbol{b}_j$.

于是, 给出把空间 E 映入 F 的一个线性映射, 就等于给出 q 个线性形式 f_j, 使得对每个 $\boldsymbol{x}\in E$ 有

$$f(\boldsymbol{x})=\sum f_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}_j.$$

因此，每个方程 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ 等价于一组 q 个方程 $f_j(\boldsymbol{x})=\beta_j$，后者还可写成 $\langle\boldsymbol{x}, f_j\rangle=\beta_j$. 这样的方程组称为纯量方程组.

现在我们再假定 E 也是有限维的.

在有限维空间上的纯量方程组

定理 设 E 是 n 维向量空间；$(\boldsymbol{x}'_i)_{i\in I}$ 是 E^* 的 r 个元素（即 E 上的 r 个线性形式）的自由族，则对任意的纯量 η_i，纯量组

$$\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_i\rangle=\eta_i \quad (i\in I)$$

有解. 解的集合形如 $\boldsymbol{x}_0+V$，这里 V 是 E 的 $(n-r)$ 维向量子空间.

事实上，$\boldsymbol{x}'_i$ 属于 E^* 的一个基底 B^*，这个基底是 E 的一个基底 B 的对偶基底.

对于 B^*，每个 $\boldsymbol{x}'_i$ 所有的坐标，除一个外都为零，所以在对偶基 B 与 B^* 下，$\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_i\rangle=\xi_i$，因此上面的纯量方程组写成：

$$\xi_i=\eta_i \quad (i\in I).$$

于是这个方程组对于 $i\in I$ 有解 $\xi_i=\eta_i$. 对于 $i\notin I$ 以任意 ξ_i 为解. 因之，定理中的 V 是 E 中使得坐标 $(\xi_i)_{i\in I}$ 全为零的向量组成的子空间，其维数正好是 $(n-r)$.

为了研究任意的纯量方程组，引入下面定义：

E^* 中由族 $(\boldsymbol{x}'_i)_{i\in I}$ 所生成的子空间的维数（即线性无关的 $\boldsymbol{x}'_i$ 的最大数目），称为纯量方程组 $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'_i\rangle=\eta_i(i\in I)$ 的秩.

利用前面的定理，可以证明：

定理 设 $\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i\rangle=\eta_i(i\in I)$ 是 n 维向量空间 E 上秩为 r 的纯量方程组. 要使它至少有一解，充要条件是对每个零线性组合 $\sum\lambda_i\boldsymbol{a}'_i=0$，也有 $\sum\lambda_i\eta_i=0$.

当这个方程组有解 $\boldsymbol{x}_0$ 时，解的集合形如 $\boldsymbol{x}_0+V$，这里 V

是 E 的 $(n-r)$ 维向量子空间.

推论 1) 要使 n 维向量空间 E 上的齐次纯量方程组有非零解, 充要条件是它的秩 $r<n$.

2) 要使 n 维空间上的一组 n 个纯量方程组有一且仅有一解(克莱姆方程组), 充要条件是对应的齐次组只有零解.

为了进一步研究纯量方程组, 特别是为了给出可以确定它的秩的方便方法, 要用到行列式的理论, 本文就从略了.

第四讲　线性映射与矩阵

A. Lichnerowicz　(法兰西学院教授)

这期讲座的前面几讲中，研究了主要的代数结构：群的结构，环的结构，体的结构，以及向量空间的结构。我这一讲是讨论把一个向量空间映入另一个向量空间的线性映射及其矩阵表示，这一讲里我们将碰到上述各种概念的一些例子。

本讲的主题正好相当于前不久所谓的线性变换的理论；老实说，现代观点并未产生任何实质上新颖的结果。我要讲的东西，你们大家都知道。现代观点以及由此产生的数学活动规律的变化，其所以有价值，正是由于方法的谐调一致，即在于概括的威力。

过时的线性变换理论中表达方式和标号细腻入微，在其浓云迷雾的掩盖下，基本结果和证明的主导思想便很难突出，行列式以及由此建立起来的线性方程组理论似乎起着主要的作用。

按照我们新的搞法，喜欢尽可能少用表达式，而对向量和映射加以直接的、内在的论证，清楚地突出奠定理论基础的那些重要的代数结构，而且不再使用行列式；我们觉得行列式是一种工具，用得过分，就会掩盖那些基本代数事实简单明白的面貌。在我的讲演里，几乎不用行列式，只是讲特征值的那部分是个例外；那里不用行列式也是行之有效的，不过这一点我就不多啰嗦了。我仍然假定大家知道古典的线性方程理论，竭

力选择各种不同的证明，以显示近世代数证明方式的运用灵活与丰富多采.

我要给你们讲的理论，无疑会使你们感到别扭而不会让你们为之倾倒，因为你们也和我一样，本来都习惯于另外一套东西．请你们不要怪我过分“抽象”：这个颇为悦耳的不逊之词究竟是什么意思，是很难说清楚的；而散布在黑板上的粉笔灰的数量也不能说明我讲的内容的具体程度．具体的东西往往正好是我们习以为常的东西，即是在我们个人的成长过程中占主导地位的东西．对于我这一代很多数学家来说，近世代数在我们掌握之前也显得抽象．而在我们更年轻的同事中那些(恕我冒说一句)从小受到向量空间熏陶的人看来，近世代数正是光彩夺目的具体之物.

复习 集合 E 上关于一个可换体 K(纯量体)的向量空间结构由下列两个合成法则确定：

1° E 的一个内合成法则，用加法表示，在 E 上定义了一个阿贝尔群的结构；

2° 一个称为“用纯量乘”的合成法则：对于 $\alpha\in K$, $\boldsymbol{x}\in E$ 相应地给出 $\alpha\boldsymbol{x}\in E$ 具有如下性质：对任意的 $\alpha, \beta\in K$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in E$ 有

$$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\quad \alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x},$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x},\ \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}.$$

这里所考虑的向量空间都假定为有限维的，维数是指 E 中自由向量的最大个数(或者线性无关向量的最大个数).

E 的向量子空间是 E 的子集 V 使得对任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in V$, $\alpha\in K$ 有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\alpha\boldsymbol{x}\in V$. E 的一组向量的线性组合是 E 的一个子空间的元素，这个子空间称为“由该向量组生成”．向量组的秩是其中所含自由向量的最大个数，也就是这组向量生

成的子空间的维数.

给了 E 的子空间 V, 则存在子空间 U. 使得 E 的每个向量都能唯一地表成 U 的一个向量与 V 的一个向量的和. 特别有 $U\cap V=0$; U 叫做 V 在 E 中的补子空间.

1. 线性映射概要

线性映射的概念

a) 设有两个向量空间 E 与 F 维数分别为 n 与 p. 确定在同一纯量体 K 上(例如实数体或复数体).

定义 把 E 映入 F 的一个映射 f 叫做线性映射, 如果满足下列两个条件:

1) 对任意 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in E$ 有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$,

2) 对任意 $\boldsymbol{x}\in E$, $\alpha\in K$ 有 $f(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x})$.

把 E **映成** F 的线性映射 f 叫做**同态映射**; 若 f 还是一一的, 则 f 叫把 E 映成 F 的**同构映射**.

E 上的线性形式, 就是一个线性映射, 把 E 映入 K 本身所构成的一维向量空间. 若该形式不恒为零, 则它还是把 E 映成 K 的同态映射. 初等几何中讲到很多线性映射: 在初等几何的空间中给定坐标系 $oxyz$, 取所有(自由)向量的空间为 E 平面 xoy 上向量构成的空间为 F, 平行于 oz 的射影为映射 f, 这是把 E 映成 F 的映射.

同样, 仍取 E 如上, $F=E$. 中心为 O、比率为 λ 的位似定义一个把 E 映成自身的一一映射.

b) E的向量由 f 产生的像是 F 中的向量, 它们构成F 的子集 $f(E)$ 是 F 的一个向量子空间. 事实上, 若$(\boldsymbol{l}_i)$是 E 的任一基底, 因 f 线性, 故相应于向量

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{l}_i \quad (x^i \in K) \tag{1}$$

得到 F 的向量

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n} x^i f(\boldsymbol{l}_i). \tag{2}$$

因此，$f(E)$ 的每个元素均可表成 $f(\boldsymbol{l}_i)$ 的线性组合. 反之，F 的每个向量，如果可以表为系数是 (x^i) 的这种线性组合，就是(1)由 f 产生的像，从而 $f(E)$ 是 F 中由 $f(\boldsymbol{l}_i)$ 生成的子空间.

$f(E)$ 的维数叫做线性映射 f 的秩；这个秩 r 正好就是 F 的那组 n 个向量 $f(\boldsymbol{l}_i)$ 的秩，故 $r \leqslant n, p$.

c) 若把 E 映成 $f(E)$ 的映射是一一的，则 $f(\boldsymbol{x})=0$ 蕴涵 $\boldsymbol{x}=0$. 若(2)式确定的 $f(\boldsymbol{x})$ 为零，则(1)式确定的 $\boldsymbol{x}$ 为零，所以 $x^i=0$. 因此，诸 $f(\boldsymbol{l}_i)$ 构成自由组，$r=n$，或

$$\dim f(E)=\dim E.$$

反之，考虑两个同维数的空间 E 与 F. 容易构造它们之间的一个同构映射：若 $(\boldsymbol{l}_i)$ 是 E 的基底，$(\boldsymbol{f}_i)$ 是 F 的基底，设 f 把 $\boldsymbol{x}=\sum x^i \boldsymbol{l}_i \in E$ 映成 $f(\boldsymbol{x})=\sum x^i \boldsymbol{f}_i \in F$. 立即可以验明，这样就定义了一个把 E 映成 F 的一一线性映射 f，即同构映射. 因此，**两个向量空间同构的充要条件是它们维数相同.**

向量子空间的像

a) **线性映射 f 有个基本性质，即保持向量空间的结构.** 确切地讲，若 V 是 E 的向量子空间，则 V 的向量由 f 产生的像是 F 的向量，它们构成的 F 的一个子集 $f(V)$ 成为 F 的向量子空间. 只需将 f 限制在 V 上，应用刚才对 $f(E)$ 得到的结果即可. 若 f 一一，则 $\dim V=\dim f(V)$；向量组的秩在同构

映射下不变.

若 W 是 $f(E)$ 的子空间, $f^{-1}(W)$ 是 E 的向量集合, 这些向量由 f 产生的像属于 W. 显然, $f^{-1}(W)$ 仍是 E 的子空间; 事实上, 若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in f^{-1}(W)$ 则 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}) \in W$. 故 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in f^{-1}(W)$; 同样, 若 $\alpha \in K$ 则 $f(\alpha \boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x}) \in W$. 故 $\alpha \boldsymbol{x} \in f^{-1}(W)$.

特别, 若取 $W=0$. 则 $f^{-1}(0)$ 是 E 的子空间.

b) 关于这个子空间, 我们将建立如下定理:

定理 向量空间 $f(E)$ 同构于 $f^{-1}(0)$ 在 E 中的任何补子空间.

设 L 是 $f^{-1}(0)$ 在 E 中的补子空间. 对于每个元素 $\boldsymbol{z} \in L$, 相应地得到 $f(E)$ 的元素 $f(\boldsymbol{z})$. 易见 $f(E)=f(L)$; 事实上, 若 $f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in E)$ 是 $f(E)$ 的任意元素, 考虑分解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \quad (\boldsymbol{y} \in f^{-1}(0),\ \boldsymbol{z} \in L).$$

我们有 $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{z})=f(\boldsymbol{z})$ (因为 $f(\boldsymbol{y})=0$).

如上定义的映射是把 L 映成 $f(E)$ 的一一映射, 因为, 若 $f(\boldsymbol{z})=0$, 则 $\boldsymbol{z} \in L \cap f^{-1}(0)$ 是零元素. 这样, 我们就定义了把 L 映成 $f(E)$ 的一一线性映射, 故 L 与 $f(E)$ 同构. 由此推出:

$$\dim f^{-1}(0)=n-r.$$

特别, 要使 f 是把 E 映成 $f(E)$ 的同构映射, 充要条件是 $r=n$. 要使 f 把 E 映成 F, 充要条件是 $r=p$. 要使 f 把 E 映成 F 的同构, 充要条件是 $r=n=p$.

把 E 映入 F 的映射构成的向量空间

对于把 E 映入 F 的线性映射构成的集合 $L(E, F)$, 我们可以把 E 上的线性形式的集合中引入的合成法则加以推广, 在 $L(E, F)$ 上引入两个合成法则如下:

1° 对于已知的$f, g\in L(E, F)$ 我们可以相应地得到一个映射，记为$f+g$，定义如下：对任意的$\boldsymbol{x}\in E$，

$$f+g: \boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}).$$

这映射显然是线性的.

2° 对于已知的$\alpha\in K, f\in L(E, F)$ 我们可以相应地得到一个映射，记为αf，定义如下：对任意的$\boldsymbol{x}\in E$，

$$\alpha f: \boldsymbol{x}\to f(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha f(\boldsymbol{x}).$$

这αf显然也是线性的.

容易验明，这两个法则总起来在$L(E, F)$中确定了向量空间的结构. 于是我们有了线性映的相加，以及线性映射与纯量的乘法. 零映射使得与所有$\boldsymbol{x}\in E$对应的元素都是$0\in F$；f的反映射使得对于每个$\boldsymbol{x}\in E$相应地给出$f(\boldsymbol{x})$的反向量.

两个或多个线性映射的积

考虑三个向量空间E, F, G. 维数分别是n, p, q. 设f是把E映入F的线性映射，g是把F映入G的线性映射. 今考虑把E映入G的一个映射，定义如下：若$\boldsymbol{x}\in E$ 则按f得到F的元素$\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$，然后按$g$得到$G$的元素 $\boldsymbol{z}=g(\boldsymbol{y})=g(f(\boldsymbol{x}))$. 这个把$E$映入$G$的映射记为$g\circ f$. 它是线性的，因为对于$\alpha\in K, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in E$有

$$\begin{aligned}g(f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2))&=g(f(\boldsymbol{x}_1)+f(\boldsymbol{x}_2))\\&=g(f(\boldsymbol{x}_1))+g(f(\boldsymbol{x}_2)),\end{aligned}$$

$$g(f(\alpha\boldsymbol{x}))=g(\alpha f(\boldsymbol{x}))=\alpha g(f(\boldsymbol{x})).$$

线性映射$g\circ f$叫做线性映射f与g的合成或积. 这个乘显然可以推广到两个以上的线性映射，而且按定义显然是结合的，关于$(L(E, F)$或$L(F, G))$线性映射的加法是分配的.

2. 矩 阵 表 示

线性映射的矩阵表示

a) 取 n 维向量空间 E, p 维向量空间 F, 在 E 中选一基底 $(\boldsymbol{l}_i)$. 这一基底取定之后, 对于每个线性映射 $f\in L(E, F)$, 相应地得到 F 的一组 n 个向量 $(f(\boldsymbol{l}_i))$; 反之, 对 F 的任何一组 n 个向量 $(\boldsymbol{f}_i)$, 也相应地有一个把 E 映入 F 的映射 f, 即是把

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{l}_i\in E$$

映成
$$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n} x^i\boldsymbol{f}_i\in F$$

的映射. 这个映射是线性的, 并且使得 $f(\boldsymbol{l}_i)=\boldsymbol{f}_i$.

因此, 在 E 中选定一基底, 我们能定义一个一一映射, 把 $L(E, F)$ (把 E 映入 F 的线性映射的集合) 映成 F 的所有 n 元向量组构成的集合.

b) 为了确定这样一组中的所有向量, 最方便的是按照 F 的一个基底引入它们的分量. 设有 F 的基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ $(\mu=1, 2, \cdots, p)$, 将 $f(\boldsymbol{l}_i)$ 用这基底表出:

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{l}_1)=a_1^1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_1^2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_1^p\boldsymbol{\varepsilon}_p, \\ f(\boldsymbol{l}_2)=a_2^1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2^2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_2^p\boldsymbol{\varepsilon}_p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\boldsymbol{l}_n)=a_n^1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_n^2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n^p\boldsymbol{\varepsilon}_p. \end{cases} \tag{3}$$

这样我们一共引入了 K 的 np 个数: 把它们排成一个矩形表:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^p \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}=(a_i^\mu)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \mu=1,\ 2,\ \cdots,\ p).$$

这样一个表用字母 A(或别的大写字母)表示，称为 n 行 p 列矩阵(或 $n\times p$ 矩阵).

因此，在 E 与 F 中分别选定了基底后，对于每个线性映射，通过(3)得到相应的 $n\times p$ 矩阵，称为 f 在所选定基底下的表示矩阵. 反之，设有 K 的元素组成的 $n\times p$ 矩阵，在同一行上的元素，是某个向量 f_i 在 F 的已知基底下的分量，这样就得到 F 的 n 个向量，根据 a)，这些向量定义一个线性映射 f. 于是有

定理 设选定 E 与 F 的基底，公式(3)定义了一个一一映射，把 $L(E,\ F)$ 映成所有 $n\times p$ 矩阵的集合.

c) 考虑向量空间 K^p 它的元素是 K 中 p 个数组成的序列，K^p 有一标准基底(基底(1, 0, $\cdots$0)，(0, 1, 0, $\cdots$0)，$\cdots$，(0, 0, $\cdots$, 1)). 设有一 $n\times p$ 矩阵 A，A 的每一行确定 K^p 的一个向量，称为行向量. 这一组 n 个行向量的秩称为矩阵 A 的秩.

根据 1，F 的基底给定后，就确定 K^p 与 F 之间的一个同构映射，使得互相对应的向量有相同的分量. 对于任意选取的 E 与 F 的基底，A 的秩等于诸行向量确定的 F 中那一组 n 个向量的秩，所以 A 的秩就是以 A 为表示矩阵的映射 f 的秩. 因此，每个矩阵 A 与其所表示的线性映射 f 有相同的秩.

正如常用向量的分量去处理向量，或用点的坐标处理点一样，用线性映射的表示矩阵来处理映射也往往很方便，其结

果就是地地道道的有关线性映射的“解析几何”.

矩阵表示的例子

a) 投影矩阵

在通常的几何空间中，给了三个单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, 两两正交. 命 E 为通常的几何向量组成的向量空间，F 是 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 生成的子空间，f 是 E 在 F 上的垂直投影，这是把 E 映成 F 的线性映射；E 有基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, F 有基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$, 我们有：

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}, \\ f(\boldsymbol{j})=\boldsymbol{j}, \\ f(\boldsymbol{k})=0. \end{cases} \quad \text{由此表示矩阵 } A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它的秩是 2, $f(E)$ 的维数 $=F$ 的维数.

b) 位似矩阵

E 同上, F 与 E 同, f 是把 E 映成自身的一个线性映, 由比率为 λ 的一个位似确定; E 与 F 有基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{i})=\lambda\boldsymbol{i}, \\ f(\boldsymbol{j})=\lambda\boldsymbol{j}, \\ f(\boldsymbol{k})=\lambda\boldsymbol{k}, \end{cases} \quad \text{由此表示矩阵 } A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

它的秩是 3.

矩阵代数：加法以及与纯量的乘法

用 $M(n, p)$ 表示由 K 的元素构成的 $n\times p$ 矩阵的集合. 我们要在 $M(n, p)$ 上定义一个关于 K 的向量空间结构.

a) $M(n, p)$ 中两个元素的加法. 设 A 与 B 是两个由 K 的元素构成的 $n\times p$ 矩阵. 若 E 与 F 是 K 上的两个向量空间，维数分别是 n 与 p, 基底分别为 $(\boldsymbol{l}_i)$ 与 (ε_μ), A, B 是把 E 映入 F 的两个线性映射 f 与 g 在此基底下的表示矩阵.

我们来讨论映射 $f+g$ 在如上基底下的表示矩阵 S. 若

$A=(a_i^\mu)$, $B=(b_i^\mu)$，我们有

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\sum_\mu a_i^\mu \boldsymbol{\varepsilon}_\mu,\quad g(\boldsymbol{l}_i)=\sum_\mu b_i^\mu \boldsymbol{\varepsilon}_\mu,$$

所以 $$(f+g)(\boldsymbol{l}_i)=f(\boldsymbol{l}_i)+g(\boldsymbol{l}_i)=\sum_\mu (a_i^\mu+b_i^\mu)\boldsymbol{\varepsilon}_\mu,$$

S 的元素为

$$s_i^\mu=a_i^\mu+b_i^\mu. \tag{4}$$

$n\times p$ 矩阵 S，其元素由(4)给出，称为矩阵 A 与 B 的和：

$$S=A+B.$$

这样定义的合成法则使 $M(n,\ p)$具有阿贝尔群的结构．矩阵 O 是所有元素都为零的矩阵；把一个矩阵的元素都换成其反元就得到该矩阵的反矩阵．

b) 与纯量的积　记号不变，$\alpha\in K$，讨论映射 αf 的表示矩阵 P．因

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\sum_\mu a_i^\mu \boldsymbol{\varepsilon}_\mu,\ \alpha f(\boldsymbol{l}_i)=\sum_\mu \alpha a_i^\mu \boldsymbol{\varepsilon}_\mu,$$

故 P 的元素为

$$P_i^\mu=\alpha a_i^\mu. \tag{5}$$

容易验明，如上定义的两个法则使 $M(n,\ p)$具有向量空间的结构．

c) 在 E 与 F 中各选定一基底，考虑把 $L(E,\ F)$映成 $M(n,\ p)$的一个一一映射 ϕ：对任何线性映射 $f\in L(E,\ F)$，使它的表示矩阵 $A=\phi(f)$与之相应．根据上面加法以及与纯量的积的定义有

$$\phi(f+g)=\phi(f)+\phi(g),\ \phi(\alpha f)=\alpha\phi(f).$$

所以，ϕ 是把向量空间 $L(E,\ F)$映成向量空间 $M(n,\ p)$的同构映射．

容易构造 $M(n,\ p)$ 的一个基底：设 E_μ^i 是 $n\times p$ 矩阵，它的每个元素除去 $e_i^\mu=1$ 外，其余为 0．显然，若 $A=(a_i^\mu)$，则

$$A=\sum_{i,\mu}a_i^\mu E_\mu^i.$$

这样，每个 $n\times p$ 矩阵都可以表成诸 E_μ^i 的线性组合．而且对 0 矩阵，所有的系数都必须是 0．诸 E_μ^i 构成 $M(n, p)$ 的一基底，它由 np 个元素（矩阵）组成．因此，彼此同构的向量空间 $M(n, p)$ 与 $L(E, F)$ 的维数都是 np.

矩阵的积

从线性映射的合成或积出发，在某些情形可以定义矩阵的积．设 E, F, G 是 K 上的三个向量空间，维数分别为 n、p、q．分别选定基底$(\boldsymbol{l}_i)$，$(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$，$(\boldsymbol{\eta}_\lambda)$．

对于所选的这些基底，命 $n\times p$ 矩阵 A 是把 E 映入 F 的映射 f 的表示矩阵，$p\times q$ 矩阵 B 是把 F 映入 G 的映射 g 的表示矩阵．现在讨论把 E 映入 G 的映射 $g\circ f$ 的表示矩阵 D；D 是 $n\times q$ 矩阵．若：

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\sum_\mu a_i^\mu\boldsymbol{\varepsilon}_\mu,\ g(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)=\sum_\lambda b_\mu^\lambda\boldsymbol{\eta}_\lambda,$$

则 $$g(f(\boldsymbol{l}_i))=\sum_\mu a_i^\mu g(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)=\sum_{\mu,\lambda}a_i^\mu b_\mu^\lambda\boldsymbol{\eta}_\lambda,$$

即 $$g(f(\boldsymbol{l}_i))=\sum_\lambda\left(\sum_\mu a_i^\mu b_\mu^\lambda\right)\boldsymbol{\eta}_\lambda.$$

故矩阵 D 的元素为

$$d_i^\lambda=\sum_\mu a_i^\mu b_\mu^\lambda \tag{6}$$

矩阵 D 叫做 A 乘以 B 的积，记成 AB．仅当 A 的列数等于 B 的行数时，乘积 AB 才能进行，乘积 AB 是 n(A 的行数) $\times q$(B 的列数)矩阵．下列性质是显然的：

1) 矩阵的积是结合的：若 A 是 $n\times p$ 矩阵，B 是 $p\times q$ 矩阵，C 是 $q\times r$ 矩阵，则

$$(AB)C=A(BC).$$

这显然是因为各个矩阵所表示的线性映射的积满足结

合律.

2) 矩阵的积关于加法是右分配与左分配的：若 A, A_1 与 A_2 是 $n\times p$ 矩阵, B, B_1 与 B_2 是 $p\times q$ 矩阵, 则

$$(A_1+A_2)B=A_1B+A_2B,\ A(B_1+B_2)=AB_1+AB_2,$$

因为相应的线性映射有同样的关系.

3) 设 A 是 $n\times p$ 矩阵, B 是 $p\times q$ 矩阵, 我们可作积 AB, 但只有 $n=q$ 时才能作积 BA, 这时 BA 是 $p\times q$ 矩阵, 而 AB 是 $n\times n$ 矩阵. 即使还有 $n=p$, 我们也容易举例说明 AB 与 BA 一般是不同的, 所以, 乘积不是可换的.

积的例子

a) 考虑直角坐标平面 xoy, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 是坐标轴上的单位向量; E, F, G 都是 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 所生成的向量空间, 取 f 为旋转 α 角的映射, g 为关于 ox 轴的对称映射, 则对基底 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ 而言,

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\sin\alpha,\\ f(\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{i}\sin\alpha+\boldsymbol{j}\cos\alpha,\end{cases}$$

的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad \begin{cases}g(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i},\\ g(\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{j},\end{cases}$$

的表示矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

所以

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ -\sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

几何上看, BA 表示先关于 ox 轴作对称然后旋转 α 角, 即

关于倾角为 $\alpha/2$ 的直线作对称；AB 表示关于倾角为 $-\alpha/2$ 的直线对称.

b) 再考虑矩阵表示这一小节中例 a) 的投影矩阵，但视为把 E 映入 E 的映射. 它在 $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 下的表示矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

几何上看，$f\circ f=f$. 由此推出 $AA=A$，这结果也可以直接验证.

一个向量关于基底的矩阵表示

设 E 是体 K 上的向量空间，把 K 视为一维向量空间，其标准基底是 $\boldsymbol{l}$ 对于把 K 映入 E 的每个线性映射 ξ，相应地有 E 的向量 $\boldsymbol{x}=\xi(\boldsymbol{l})$. 反之，对于 E 的每个向量 $\boldsymbol{x}$，也相应地有一个把 K 映入 E 的映射 ξ:

$$\xi:\ \alpha\to\alpha\boldsymbol{x}\quad(\alpha\in K)$$

因此我们在 E 与 $L(K, E)$ 之间定义了一个同构映射.

在 E 中选定基底 $(\boldsymbol{l}_i)$，则

$$\xi(\boldsymbol{l})=\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{l}_1+x^2\boldsymbol{l}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{l}_n,$$

从而 ξ 关于所选基底的表示矩阵是 $1\times n$ 矩阵

$$X=(x^1x^2\cdots x^n).$$

这个矩阵叫向量 $\boldsymbol{x}$ 关于基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 的表示矩阵.

设 F 是 K 上的另一向量空间，f 是把 E 映入 F 的线性映射. 映射 $f\circ\xi$ 是把 K 映入 F 的线性映射，相当于向量 $f(\boldsymbol{x})$. 若 A 是 f 关于基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 的表示矩阵，$(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ 是 F 的基底，则 $f\circ\xi$ 关于 $\boldsymbol{l}$ 与 $(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ 的表示矩阵是 XA，这个 $1\times p$ 矩阵是 F 的向量 $f(\boldsymbol{x})$ 关于基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ 的表示矩阵.

这样，一个向量空间的向量可以表为一个单行矩阵 X，

这个矩阵的列数就是该空间的维数. 在线性映射下向量的像由同样类型的矩阵 XA 表示, 即是原向量的表示矩阵乘以该线性映射的表示矩阵之积.

线性形式关于基底的表示矩阵

令 y^* 是向量空间 F 上的线性形式. 依定义, y^* 就是把 F 映入 K 的线性映射. 若 $(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ 是 F 的基底, $\boldsymbol{l}$ 是 K 的标准基底, 则 y^* 的表示矩阵由如下公式得到:

$$\begin{cases} y^*(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = y_1^* \boldsymbol{l}, \\ y^*(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = y_2^* \boldsymbol{l}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^*(\boldsymbol{\varepsilon}_p) = y_p^* \boldsymbol{l}, \end{cases} \quad \text{即} \quad Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_p^* \end{pmatrix},$$

这里 Y^* 是 1 列矩阵.

令 f 是把 E 映入 F 的线性映射, 映射 $y^* \circ f$ 就是把 E 映入 K 的线性映射, 即 E 上的线性形式, 亦即 E 的对偶空间 E^* 的元素. 若 A 是 f 关于 E 的基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 和 F 的基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ 的表示矩阵, 则 $y^* \circ f$ 关于 $(\boldsymbol{l}_i)$ 与 $\boldsymbol{l}$ 的表示矩阵是 AY^*.

所以, 由 f 导出一个把 F^* 映入 E^* 的线性映射 f^*, 其定义如下:

$$f^*: y^* \in F^* \to y^* \circ f \in E^*.$$

这是 f 的对偶映射. 如果要得到这个映射在 F^* 和 E^* 关于已知基底的对偶基下的表示, 就要考虑转置(交换行与列)矩阵, 再按相应的形式处理.

3. 线性算子与方阵

线性算子环与方阵环

a) 给了 n 维向量空间 E, 把 E 映入自身的线性映射称

为 E 的线性算子(或 E 的自同态映射).

只要假定 F 就是 E, 前面的整个理论都可用于线性算子. 为了用矩阵表示线性算子 f, 只需给出 E 的基底 $(\boldsymbol{l}_i)$, 并将向量 $f(\boldsymbol{l}_i)$ 用这基底表出:

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\sum_{j=1}^{n} a_i^j \boldsymbol{l}_i$$

因此, 算子 f 在基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ (一般情形的基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_\mu)$ 与 $(\boldsymbol{l}_i)$ 一致)下由一个 $n\times n$ 矩阵(方阵)表示:

$$A=(a_i^j).$$

b) 设 $L(E, E)$ 是 E 的线性算子的集合; $L(E, E)$ 自然具有向量空间的结构. 不仅如此, E 的两个线性算子的积 $g\circ f$ 恒有定义, 仍为 E 的线性算子. 在 $L(E, E)$ 中的这种合成法则是结合的, 关于加法右分配且左分配, 但不是交换的. 最后, 存在一个值得注意的线性算子, 即恒等算子 e: 与 E 的每个向量对应的是该向量自身; 对任意 $f\in L(E, E)$, 有

$$f\circ e=e\circ f=f.$$

因此, 上述合成法则有一单位元素. 若 $\alpha\in K$, 则

$$f\circ(\alpha e)=(\alpha e)\circ f=\alpha f,$$

所以, 用纯量 α 相乘, 可视为线性算子乘积的特例(左乘或右乘以 αe 的积).

这样一来, 在 $L(E, E)$ 上就有两个合成法则:

一个法则用加法表示, 使 $L(E, E)$ 具有阿贝尔群的结构; 另一个法用 $\circ$ 表示, 满足非可换环的公理, 有单位元素.

定理 线性算子的加法与乘法在 $L(E, E)$ 上定义一个有单位元素的非可换环结构.

c) 设 $M(n, n)$ 是 $n\times n$ 方阵的结合; 两个这样的矩阵 A, B 的乘法恒有意义, $AB=(\sum_j b_j^k a_i^j)$. 在 E 中选定基底 $(\boldsymbol{e}_i)$, 考

虑把 $L(E, E)$映成 $M(n, n)$的一一映射 ϕ, 相应于每个线性算子 f, 映射 ϕ 给出这个算子的矩阵表示 $A=\phi(f)$. 根据矩阵加法与乘法的定义有:

$$\phi(f+g)=\phi(f)+\phi(g),\ \phi(g\circ f)=\phi(g)\cdot\phi(f).$$

刚才对 $L(E, F)$得到的结果对于 $M(n, n)$自然成立. 特别, 矩阵的乘积有单位元素, 即恒等算子的表示矩阵 I:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=(\delta_i^j).$$

由上可得如下定理:

定理 $n\times n$ 矩阵的加法与乘法在 $M(n,n)$上定义一非可换环结构, 有单位元素并同构于 $L(E, E)$的环结构.

这样的环可以有零因子, 即有可能两个矩阵的积为零, 但其每一因子都不为零, 如下例所示:

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

最后, 容易定义系数在 K 中, 变元(向量)在算子环或方阵环中的多项式. 令

$$A^0=I,\ A^1=A,\ A^2=AA,\ \cdots,\ A^p=A^{p-1}A,$$

立即有
$$A^pA^q=A^{p+q}=A^qA^p.$$

单项式是 A 的幂与 $\alpha\in K$ 的积 αA^p. 多项式是有限个单项式的和. 对于系数与变元都在K中的任何多项式

$$P(\zeta)=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\zeta^k,$$

我们可以相应地给出一个矩阵变元多项式:

$$P(A)=\sum_{k=0}^{p}\alpha_kA^k\quad(A\in M(n, n)).$$

若 K 是复数体，可取 $P(\zeta)$ 如下：

$$P(\zeta)=\alpha_p\prod_{k=1}^{p}(\zeta-\mu_k),$$

可以立即验明

$$P(A)=\alpha_p\prod_{k=1}^{p}(A-\mu_k I).$$

正则线性算子与正则矩阵

a) E 的线性算子 f 叫做正则的，如果它是把 E 映成 E 的线性映射. f 是正则的充要条件是 $f(E)$ 与 E 重合，即 f 的秩是 n. 若 f 的秩为 n 则 f 是一一的，并确定一把 E 映成 E 的同构映射，我们把这样的 f 叫做自同构映射，非正则的算子叫奇异算子.

两个正则线性算子 f 与 g 的积 $g\circ f$ 显然是正则的线性算子，因它把 E 映成 E. 反之，若 f 与 g 是两个线性算子，使得 $g\circ f$ 正则，则 f 与 g 全都是正则算子. 事实上：

$$\operatorname{rang}(g\circ f)=\dim g(f(E))\leqslant\dim f(E)=\operatorname{rang}(f).$$

由于 $\operatorname{rang}(g\circ f)=n$，有 $\operatorname{rang}f=n$，故 f 正则，$f(E)=E$；由于 $g(E)$ 的维数是 n，g 也正则.

设 f 正则，故 f 一一，所以对于每个 $\boldsymbol{y}\in E$ 相应地有唯一一个向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$；把 E 映成 E 的一一映射 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}$ 是 f 的逆映射 f^{-1} 使得对每一 $\boldsymbol{x}\in E$ 有

$$f^{-1}[f(\boldsymbol{x})]=\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

这就是映射 f^{-1} 的特性. 按照与前述相同的论证可见，f^{-1} 是线性的，所以每个正则线性算子 f 都有逆映射 f^{-1}，它也是正则线性算子，故也有逆算子. 显然，f^{-1} 的逆是 f. 关系 (7) 以及交换 f 和 f^{-1} 而得的关系可以改写为：

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=e. \tag{8}$$

若两个线性算子 f 与 g 使得 $g\circ f=e$，则它们是正则的，

并且对于每个 $x \in E$ 有

$$g(f(x)) = x,$$

这表明 g 是正则线性算子 f 的逆算子. 于是下面定理成立:

定理 乘法$\circ$使 E 的正则线性算子的集合具有群结构, 这个群称为 E 的自同构群.

若 f 与 g 是两个正则线性算子, 则 $g \circ f$ 正则, 故存在逆算子, 就是 $f^{-1} \circ g^{-1}$. 这一性质对任何一个群都成立, 因为

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ f = e.$$

b) 每个正则线性算子的表示矩阵叫做正则矩阵. 要使一个矩阵是正则矩阵, 充要条件是: 它的秩是 n. 选定 E 的一个基底, 考虑映射 Φ: 对于每个正则线性算子, 相应地给出这个算子的矩阵表示. 这个映射可以将前述的有关正则算子的结果转化成正则矩阵的结果.

特别, 对每一 $n \times n$ 正则矩阵 A 存在唯一 $n \times n$ 矩阵 A^{-1}, 使得对任意 $1 \times n$ 矩阵 X:

$$XAA^{-1} = X,$$

即

$$AA^{-1} = I.$$

A^{-1} 是正则的, 称为 A 的逆矩阵, 还满足:

$$A^{-1}A = I.$$

上面的讨论表述成下面定理:

定理 $n \times n$ 矩阵的乘法使得由 K 中元素组成的 $n \times n$ 正则矩阵的集合具有群结构, 这个群同构于 K 上的 n 维向量空间的自同构群, 称为 K 的 n 元线性群, 记为 $GL(n, K)$.

若 A 与 B 是两个 $n \times n$ 正则矩阵, 则 AB 正则, 并有逆 $B^{-1}A^{-1}$. 还要注意, 若 A 正则, 则等式 $AB = 0$ 与 $BA = 0$ 中任何一个都蕴涵 $B = 0$. 因为, 设 A^{-1} 是 A 的逆, 由 $AB = 0$ 得 $A^{-1}AB = 0$, 或 $B = 0$, 另一等式仿此可得.

行列式的作用

a) 每个 $n\times n$ 方阵都有其相应的行列式 $D(A)$(其值属于 K). 行列式为零的充要条件是行向量组线性相关, 即矩阵的秩小于 n. 所以, 一个矩阵是正则的充要条件是它的行列式 $\neq 0$.

若 A 与 B 是两个 $n\times n$ 矩阵, 常用的行列式乘法如下:

$$D(AB)=D(A)D(B).$$

b) 方程组的克莱姆法则使我们直接得到正则矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 的元素.

设 Y 是已知的 $n\times 1$ 矩阵, X 是 $n\times 1$ 未知矩阵, 则矩阵方程

$$AX=Y$$

化为一组 n 个线性方程:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x^i = y^j,\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

这是克莱姆方程组. 若 α_j^i 是 $D(A)$ 按 i 行或 j 列的展开式中元素 a_j^i 的系数, 则

$$x^i=\frac{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^i y^j}{D(A)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j^i}{D(A)}\,y^j=\sum_{j=1}^{n}b_j^i y^j,$$

这里令

$$b_j^i=\frac{\alpha_j^i}{D(A)}. \tag{9}$$

若 $B=(b_j^i)$, 则有下列矩阵关系:

$$X=BY,$$

B 是 A 的逆矩阵.

利用方阵确定任意矩阵的秩

给了 $n\times p$ 矩阵 A, $q\leqslant n,\ p$, 从 A 中划去 $(n-q)$ 行与 $(p-q)$ 列得到的 $q\times q$ 方阵, 称为从 A 选出的 q 阶方阵. 矩阵 A

的秩可利用下列定理确定.

定理 矩阵 A 的秩等于从 A 中可以选出的正则方阵的最高阶数.

设 A 的秩为 r. 要证明: 不可能从 A 中选出一个正则方阵, 其阶数 $s>r$, 但却能从 A 中至少选出一个正则方阵, 其阶数为 r.

因 A 的秩为 r 故 A 的 $s(>r)$ 个任意行向量是线性相关的. 设 B 是从 A 选出的 s 阶方阵. 它的行包含在 A 的 s 行中; 所以, B 的行向量组是线性相关的, B 的秩不是 s, 故 B 非正则.

定理的后一部分证明稍长. 考虑向量空间K^p, (ε_μ)是其标准基底.

若 A 的秩为 r, 则 A 中存在一组 r 个自由行向量, 为简化记号, 假定就是 A 的前 r 行, 记为(λ_a) $(a=1, \cdots, r)$. 令 V_1 是 K^p 中由(λ_a)生成的向量子空间.

若 $r<p$, 则至少存在一 ε_μ 不属于 V_1, 所以同诸 λ_a 线性无关; 将这一 ε_μ 加到 λ_a 中, 再考虑这样得到的一组新向量. 容易看出, 在(ε_μ)中总是可以选取$(p-r)$个向量, 同诸 λ_a 一起成为 K^p 的一个基底; 设这$(p-r)$个向量是$(\varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_p)$, 或简记为$(\varepsilon_\lambda)$ $(\lambda=r+1, \cdots, p)$.

用 V_2 表示 K^p 中由 r 个向量$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$或$(\varepsilon_a)$生成的子空间, 用 V_3 表示由(ε_λ)生成的子空间. 显然, V_1 与 V_2 都是 V_3 的补子空间. 令 $x=\sum_{\mu=1}^{p} x^\mu \varepsilon_\mu \in V_1$, K^p 是 V_2 与 V_3 的直和, 所以

$$x=y+z, \ (y\in V_2, \ z\in V_3),$$

$$y=\sum_{a=1}^{r} x^a \varepsilon_a, \ z=\sum_{\lambda=r+1}^{p} x^\lambda \varepsilon_\lambda.$$

由 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}$ 所定义的把 V_1 映入 V_2 的映射 f 显然是线性的. 它是一一的, 因为只有对同时属于 V_1 与 V_3 的向量 $\boldsymbol{x}$, 即零向量, 才有 $\boldsymbol{y}=0$. 因此 f 的秩等于 V_1 的维数 r, 而 f 是把 V_1 映成 V_2 的同构映射.

在这同构映射下, 与向量:

$$\boldsymbol{\lambda}_a=\sum_{\mu=1}^{p}a_a^{\mu}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu},\ (a=1,\ \cdots,\ r),$$

对应的向量是

$$f(\boldsymbol{\lambda}_a)=\sum_{b=1}^{r}a_a^b\boldsymbol{\varepsilon}_b,\ (a=1,\cdots,r).$$

在 V_1 的基底 $(\boldsymbol{\lambda}_a)$ 和 V_2 的基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_b)$ 下, 同构映射 f 的表示矩阵 $B=(a_a^b)$ 有秩 r, 故为正则矩阵, 这就是从 A 中选出的 r 阶正则矩阵.

反变与相似矩阵

a) 设 g 是 E 的正则线性算子, $(\boldsymbol{l}_i)$ 是 E 的基底, P 是 g 在此基底下的正则表示矩阵. n 个向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=g(\boldsymbol{l}_i)$ 构成自由向量, 它们确定 E 的另一基底. 反之, 给了 E 的一个基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$, 则存在唯一的线性算子 g 将基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 映成基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$: 这个算子显然是正则的, 对于 $\boldsymbol{x}'=\sum x'^i\boldsymbol{l}_i$ 相应地给出 $g(\boldsymbol{x}')=\sum x'^i\boldsymbol{\varepsilon}_i$.

向量 $\boldsymbol{x}=g(\boldsymbol{x}')$ 是 E 的向量, 在基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ 下由 $1\times n$ 矩阵确定:

$$X'=(x'^i).$$

在原来的基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 下, 它由下面矩阵确定:

$$X=X'P.$$

因此, 给了两个基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 与 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$, 如果在前一个基底下由正则矩阵 P 表示的线性算子把前一个基底变成后一个基底, 那么在前一基底下由矩阵 X 表示的向量 $\boldsymbol{x}$ 在后一基底下则表为下面的矩阵:

$$X' = XP^{-1} \tag{10}$$

这就是所谓向量分量的反变式变换的意思.

b) 设空间 E 有两个基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 与 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$, A 是 $n\times n$ 矩阵, 对于 $(\boldsymbol{l}_i)$ 表示某一线性算子 f, 如果 X 是向量 $\boldsymbol{x}\in E$ 在基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 下的表示, 则向量 $f(\boldsymbol{x})$ 的表示为

$$Y = XA.$$

关于 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$, $\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 分别表为

$$X' = XP^{-1},\ Y' = YP^{-1},$$

因此
$$Y' = X'PAP^{-1},$$

f 关于基底 $(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ 的表示矩阵是

$$B = PAP^{-1},\ (P\in GL(n,\ K)).$$

矩阵 B 叫做 A 关于线性群的相似矩阵; A 与 B 是同一线性算子在不同基底下的表示矩阵. 特别, 如果给出指标 i 所成序列的置换 π, 则矩阵 $A=(a_i^j)$ 与 $B=(a_{\pi(j)}^{\pi(i)})$ 相似, 因为它们是同一个线性算子关于基底 $(\boldsymbol{l}_i)$ 与 $(\boldsymbol{l}_{\pi(j)})$ 的表示. 这时, 我们说 B 由 A 置换而得.

容易看出相似是 $M(n,\ n)$ 的元素之间的等价关系: 特别, 传递性是明显的; 若 $C=QBQ^{-1}(Q\in GL(n, K))$, $B=PAP^{-1}$, 则

$$C = QPAP^{-1}Q^{-1} = (QP)A(QP)^{-1},$$

这里 QP 是正则矩阵.

4. 谱的概念, 方程关于线性群的法式

法式问题

相似既然是 $M(n,\ n)$ 中的等价关系, 让我们考虑与一个已知矩阵相似的矩阵的集合, 这个集合的元素彼此相似, 称为

关于线性群的等价类，于是 $M(n, n)$ 被分成等价类.

知道了等价类中的一个矩阵，这等价类就确定了，因之自然想在等价类的诸矩阵中找出一个尽可能简单的矩阵，使得对于每一等价类可以相应地唯一决定（精确到置换）其中一个矩阵，说明该等价类的特性. 这个矩阵与等价类中各矩阵都相似，叫做该等价类中任何矩阵 A 的法式.

矩阵化为法式的问题涉及矩阵 A 的元素的某些函数，这些函数有一个重要性质：对所有与 A 相似的矩阵取同一值. 这样的函数称为矩阵 A 关于线性群的不变量. $n\times n$ 矩阵关于线性群的法式问题是一个相当困难的代数问题；我们只能在下节讨论一个特别情形.

对角矩阵

最简单的一种方阵是对角方阵：$n\times n$ 矩阵 A 叫做对角矩阵，如果它的元素除去主对角线上的外都为 0；例如单位矩阵 I 就是对角矩阵. 设 α_i 是对角矩阵 A 的对角线上的第 i 个元素. 若 $(\boldsymbol{l}_i)$ 是 E 的一个基底，则 A 表示一线性算子 f，满足：

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\alpha_i\boldsymbol{l}_i.$$

因此，E 中由 $\boldsymbol{l}_i$ 生成的每个一维子空间对 f 是不变的. 记 $A=(\alpha_i)$.

所有对角矩阵构成 $M(n, n)$ 的可换子环. 事实上，若 $A=(\alpha_i)$，$B=(\beta_i)$ 是两个对角矩阵，它们对于 $(\boldsymbol{l}_i)$ 表示两个算子 f 与 g，使得

$$f(\boldsymbol{l}_i)=\alpha_i\boldsymbol{l}_i,\ g(\boldsymbol{l}_i)=\beta_i\boldsymbol{l}_i,$$

所以
$$f(\boldsymbol{l}_i)+g(\boldsymbol{l}_i)=(\alpha_i+\beta_i)\boldsymbol{l}_i,$$

$$g(f(\boldsymbol{l}_i))=\beta_i\alpha_i\boldsymbol{l}_i,$$

$A+B=(\alpha_i+\beta_i)$，$BA=(\beta_i\alpha_i)$ 是对角矩阵，所以积 BA 显然

是可换的.

我们自然要研究对角矩阵是否能成为法式的问题. 在一般情形下, 这是不可能的, 不过下节要提出的一个重要特例却是可能的.

特征向量与特征值

以后我们都假定 K 是复数体 $\boldsymbol{C}$.

a) 设 E 是 C 上的向量空间. 给了 E 的线性算子 f, 我们来求对 f 不变的一维子空间. 若 $\boldsymbol{P}\neq 0$ 属于这样的子空间, 则存在一纯量 χ 满足:

$$f(\boldsymbol{P})=\chi\boldsymbol{P},\ \chi\in C. \tag{11}$$

上式可写成

$$(\chi e-f)(\boldsymbol{P})=0. \tag{12}$$

若存在一个这样的向量 $\boldsymbol{P}$, 则 $\chi e-f$ 非正则. 反之, 若 $\chi e-f$ 非正则(奇异), 则 $(\chi e-f)^{-1}(0)$ 不是 0, 即存在 $\boldsymbol{P}\neq 0$ 满足(11)或(12). 由此得到下述定义:

定义 使得 $\chi e-f$ 为奇异算子的每一 $\chi\in C$ 称为线性算子 f 的特征值. 使得 $f(\boldsymbol{P})=\chi\boldsymbol{P}$ 的任何向量 $\boldsymbol{P}\neq 0$ 称为属于特征值 χ 的特征向量. f 的特征值的集合称为 f 的谱.

b) 在 E 内取一个基底 $(\boldsymbol{l}_i)$, 设 A 是 f 的表示矩阵; 则 $(\chi e-f)$ 的表示矩阵为 $(\chi I-A)$. 要使 χ 是 f 的特征值, 充要条件是 $D(\chi I-A)=0$, 即 χ 是下式的零点:

$$\psi(\chi)=D(\chi I-A)=\begin{vmatrix}\chi-a_1^1 & -a_1^2 & \cdots & -a_1^n\\ -a_2^1 & \chi-a_2^2 & \cdots & -a_2^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_n^1 & -a_n^2 & \cdots & \chi-a_n^n\end{vmatrix}. \tag{13}$$

要注意, 按定义, 对于两个相似矩阵, 它们的 n 阶多项式 $\psi(\chi)$ 是一样的. 事实上, 若 $B=PAP^{-1}$, 则

$$\chi I-B=P(\chi I-A)P^{-1},$$
$$D(\chi I-B)=D(\chi I-A).$$

我们把多项式 $\psi(\chi)$ 称为算子 f 或矩阵 A 的特征多项式. 其零点 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ 可同可不同，它们就是 f 的特征值，也叫 A 的特征值. $\psi(\chi)$ 的各系数都是 A 关于线性群的不变量. 特别，$\psi(\chi)$ 的头两项显然如下:

$$\psi(\chi)=\chi^n-(\sum_i a_i^i)\chi^{n-1}+\cdots$$

所以，函数:

$$\operatorname{tr}A=\sum a_i^i=\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n$$

是 A 的不变量，称为矩阵 A (或它在基底 $\boldsymbol{l}_i$ 下所表示的算子 f) 的迹.

把具有互异特征值的矩阵化为法式

设 A 是元素在 C 中的 $n\times n$ 矩阵，它的特征值 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$ 互异. $(\boldsymbol{l}_i)$ 是 C 上的向量空间 E 的一个基底，设 f 是 A 所表示的线性算子，以 (χ_i) 为特征值. 我们来研究这个算子. 对于每一特征值 χ_i，至少有一个相应的特征向量 $\boldsymbol{P}_i\neq 0$.

$$f(\boldsymbol{P}_i)=\chi_i\boldsymbol{P}_i,\ (i=1, 2, \cdots, n). \tag{14}$$

如上得到的 n 个特征向量 $\boldsymbol{P}_i$，当诸 χ_i 各不相同时构成一组自由向量. 事实上，假定只有 $q(<n)$ 个向量 $\boldsymbol{P}_i$ 线性无关，例如前 q 个，则 $\boldsymbol{P}_n$ 可唯一地表成 $\boldsymbol{P}_\mu(\mu=1, \cdots, q)$ 的线性组合:

$$\boldsymbol{P}_n=\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_\mu\boldsymbol{P}_\mu,\ (\alpha_\mu\text{不全为}0). \tag{15}$$

由此推出:

$$f(\boldsymbol{P}_n)=\sum_\mu\alpha_\mu f(\boldsymbol{P}_\mu),$$

即

$$\chi_n\boldsymbol{P}_n=\sum_\mu\alpha_\mu\chi_\mu\boldsymbol{P}_\mu.$$

若 $\chi_n=0$，则诸 χ_μ 全不为 0，故诸 $\boldsymbol{P}_\mu$ 有一个线性组合为

0，但系数不全为 0．因此 $\chi_n \neq 0$，

$$P_n = \sum_{\mu} \alpha_\mu \frac{\chi_\mu}{\chi_n} P_\mu. \tag{16}$$

此式应与(15)一致；若 $\alpha_\mu \neq 0$，则 $\chi_\mu = \chi_n$，故特征值不是互异的．

自由向量组 (P_i) 构成 E 的一个基底．根据(14)，在这一个基底下，算子 f 由如下对角矩阵表示：

$$R(A) = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \chi_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \chi_n \end{pmatrix},$$

它与 A 相似．

因此，任何具有互异特征值的矩阵 A 与对角矩阵相似，对角线上的元素是 A 的特征值．在诸特征值非互异的情形，法式有更复杂的形式(约当法式)．

要使矩阵 B 相似于矩阵 A 必须它们有同样的特征值．如果诸特征值互异，这条件还是充分的，因为两个矩阵都相似于 $R(A)$．

哈密顿-凯莱定理

方阵 A 的特征多项式 $\psi(x)$ 有一个重要性质，我们来给出一个初等证明．

设 $\alpha_j^i(\chi)$ 是 $D(\chi I - A)$ 按 i 行或 j 列的展开式中 i 行 j 列元素的系数．这是 χ 的 $n-1$ 次多项式．令 $C(\chi) = (\alpha_j^i(\chi))$，则有

$$(\chi I - A)^{-1} = \frac{C(\chi)}{\psi(\chi)},$$

所以

$$C(\chi)(\chi I - A) = \psi(\chi) I, \tag{17}$$

这里 $C(\chi)$ 是以矩阵为系数的 χ 的多项式：

$$C(\chi)=\Gamma_1\chi^{n-1}+\Gamma_2\chi^{n-2}+\cdots+\Gamma_n,\ (\Gamma_i\in M(n,\ n)).$$

若将 $\psi(\chi)$ 写成

$$\psi(\chi)=\chi^n+c_1\chi^{n-1}+\cdots+c_n,$$

则由(17)，比较系数得:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 \qquad\qquad\qquad &= I,\\
\Gamma_2 \qquad -\Gamma_1 A &= c_1 I,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
\Gamma_n-\Gamma_{n-1}A \qquad &= c_{n-1}I,\\
-\Gamma_n A \qquad &= c_n I.
\end{aligned}$$

依次用 A^n, A^{n-1}, …, A^0 乘上面的各式，然后各边相加便得

$$\psi(A)=0.$$

哈密顿-凯莱定理 若 $\psi(\chi)$ 是方阵 A 的特征多项式，则

$$\psi(A)=0.$$

第五讲　二次形式与厄米形式

P. Lelong　(索尔本大学教授)

1. 引　言

n 个实变量 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的二次形式是这些变量的二次齐次多项式,其系数为实数,即:

$$F=\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j. \tag{1}$$

(1) 式求和是关于脚标 i 和 j 各自独立地从 1 变到 n 而言; 乘积 $x_ix_j=x_jx_i$ 是可换的, 所以设 $a_{ij}=a_{ji}$, 亦即 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$是对称矩阵. (1)式还可写成:

$$F=\sum_{i} a_{ii}x_i^2+2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j. \tag{2}$$

二次形式的研究间接地属于"数学专修班"[注1] 的教学大纲;二次曲面方程实际上可以用齐次坐标 $x_1=X$, $x_2=Y$, $x_3=Z$, $x_4=T$ 写成 $F=0$, 即是:

$$F=AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+\cdots+2CT$$
$$+\cdots+DT^2=0.$$

形式(1)关于正交群的化简问题涉及"s 的方程"[注2]. 某些学校的教学大纲中明确提出二次形式, 这可以对本讲演的观点加以修正. 我们将直截了当地使用一些基本概念(线性变换, 正交群, 极形式的对称 $\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$, 等等. 这里 $A\boldsymbol{x}$ 是向量 $\boldsymbol{x}$

[注1]　原文为 Mathématique Spécials, 指法国中学里专门为投考理工学院所设的班.——译者注

[注2]　指下面的特征方程。

经过对称矩阵作用后的变形)，以及其他几个讲演里已有的一些概念．我们将得到最初等的证明，好处是这些证明对任意多个变量都成立．对于迄今只注意研究二次曲面的教学工作，还有一个理由要加以修改，即是使教学工作更接近于绝大多数学生在物理和力学中将会碰到的那些应用．二次曲面可以很方便地用来表现二次形式，例如刚体的惯性椭球，所以一方面我们为二次曲面的讨论留有一席之地，同时我们着重研究线性变换

$$y_i=\sum_j a_{ij}x_j, \qquad a_{ij}=a_{ji}, \tag{3}$$

即是 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$($A=(a_{ij})$是对称矩阵)，以及变换(3)的特征值与特征向量．特征值的概念涉及到许多应用(例如刚体的运动矩与旋转矩之间的对应关系；梁的弯曲力偶与中性线之间的对应关系，等等)．

本文在讨论形式(1)的同时，还要讨论所谓的厄米形式

$$\phi=\sum_{p,q} c_{pq}\bar{x}_p x_q \tag{4}$$

其系数 c_{pq} 是复数；a 与 $\bar{a}$ 表示两个共轭复数．形式 ϕ 关于两组变量 x_p, $\bar{x}_p$ 是双线性的．如果对于任何共轭复数 x_p, $\bar{x}_p$, ϕ 的值是实数，它就叫厄米形式．为此，必须且只需

$$c_{pq}=\bar{c}_{qp} \tag{5}$$

这是明显的(除了标号为 p, q 的变量外，让其余变量全为零)．厄米形式有重要的作用，特别是在量子力学中．

对厄米形式的研究，即是它关于酉群的化简问题，要用到它的双线性特征．二次形式的研究只不过是一个特殊情形．事实上，如果在(4)中，c_{pq} 是实数，则由(5)式得 $c_{pq}=c_{qp}$．所以二次形式(1)是就实变量来讨论的实系数厄米形式．我们在研究厄米形式的同时，也顺便指出二次形式中可以进行的某些

简化，这主要在于实数及其共轭并无区别．在各种特殊情况下将指出表达方式的修改，据此可以独立讨论实坐标空间 E_n 中的二次形式.

2．赋范空间 C_n 与 E_n

我们用 C_n 表示复数体上的 n 维向量空间．存在 C_n 的 n 个元素(或向量) $\boldsymbol{e}_i$ 构成 C_n 的一个基底 R_0，即诸 $\boldsymbol{e}_i$ 可将 C_n 的任一元素 $\boldsymbol{x}$ 表成如下形式：

$$\boldsymbol{x}=\sum x_i\boldsymbol{e}_i.$$

诸 x_i 是 n 个复数，称为 $\boldsymbol{x}$ 关于基底 R_0 的坐标．C_n 的自同态是把 C_n 映入自身的变换 $\boldsymbol{x}'=g(\boldsymbol{x})$，它保持向量空间的结构[注]．如果知道

$$\boldsymbol{e}_i'=g(\boldsymbol{e}_i)=\sum_j a_{ji}\boldsymbol{e}_j, \tag{6}$$

g 就确定了．这时 $\boldsymbol{x}'=\sum x_ig(\boldsymbol{e}_i)=\sum_{i,j}x_ia_{ji}\boldsymbol{e}_j$．在基底 R_0 下，变换 $\boldsymbol{x}'=g(\boldsymbol{x})$ 表成

$$x_i'=\sum_j a_{ij}x_j. \tag{7}$$

因此我们说自同态 $\boldsymbol{x}'=g(\boldsymbol{x})$，即是(6)，在基底 R_0 下由矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示；实际上，这个矩阵使我们可以在基底 R_0 下把 $\boldsymbol{x}'$ 的坐标按公式(7)表成 $\boldsymbol{x}$ 的坐标的函数．在(7)中视向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 为 $1\times n$ 矩阵便可将这些坐标缩写为

$$\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

依次施行两个自同态 $\boldsymbol{x}''=B\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$ 便确定一自同态 $\boldsymbol{x}''=BA\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{x}$，这里 $C=BA$ 是矩阵积：

$$c_{ij}=\sum_s b_{is}a_{sj}.$$

［注］ 参考 G. Choquet 的讲演：向量空间。

若 A 表示矩阵(a_{ij})，我们将元素为

$$a'_{ji}=a_{ij}$$

的矩阵 A' 称为 A 的转置.

显然有：$(A')'=A$，$(BA)'=A'B'$.

C_n 中的纯量积与范数 两个向量$\boldsymbol{a}$与 $\boldsymbol{b}$ 的厄米纯量积是指一个复数 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的函数，具有下列性质：

a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\overline{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}}$(非可换)；

b) $\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}_1+\mu\boldsymbol{b}_2)=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1)+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_2)$,

$(\lambda\boldsymbol{a}_1+\mu\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{b}=\bar{\lambda}(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b})+\bar{\mu}(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b})$,

λ 与 μ 是任意复数，$\bar{\lambda}$ 与 $\bar{\mu}$ 是它们的共轭复数；

c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 是一非负实数，仅当 $\boldsymbol{a}$ 是零向量时为零. $\boldsymbol{a}$ 的范数是指非负实数

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$

若将 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 在一组基底 $R_0=(\boldsymbol{e}_i)$下表出，则有：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i)\cdot(\sum_j b_j\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i,j}\bar{a}_i b_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j).$$

如果我们确定了纯量积$(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)$ 那么厄米纯量积便完全确定了.

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 叫做正交的，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 范数$\|\boldsymbol{a}\|=1$ 的向量 $\boldsymbol{a}$ 叫做单位向量. 一组两两正交的单位向量叫做法正交的. 一个基底 R_0 叫做法正交基底，如果它由法正交向量组成.

定理 1 若 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_m$ 是m个线性无关的向量，则存在一组法正交向量 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{b}_m$ 使得对每个整数 $k(1\leqslant k\leqslant m)$，向量组$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$与$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k)$都是同一向量子空间的两个基底.

对于 $m=1$，定理显然，因定理的假设蕴涵$\|\boldsymbol{a}_1\|\neq0$，故只

需取 $\boldsymbol{b}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$ 即可.

关于m用归纳法，设结论对 $m-1$ 真. 故存在 $m-1$ 个向量 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_{m-1}$ 使得对于 $k\leqslant m-1$, $(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_k)$与$(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_k)$是同一向量子空间的基底, 特别, 对 $k=m-1$ 是如此.

令
$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}_m-\sum_i \boldsymbol{b}_i\overline{(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{a}_m)},$$

显然 $\boldsymbol{c}$ 不属于由$(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{m-1})$生成的向量空间, 否则 $\boldsymbol{a}_m$ 也是这样, 此与假设不合.

定义:
$$\boldsymbol{b}_m=\boldsymbol{c}(\|\boldsymbol{c}\|^{-1}),$$
于是有
$$\|\boldsymbol{b}_m\|=1,\ \boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{b}_k=\|\boldsymbol{c}\|^{-1}[\boldsymbol{a}_m\cdot\boldsymbol{b}_k-(\overline{\boldsymbol{b}_k\cdot\boldsymbol{a}_m})]=0,$$
故 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 是法正交组, 与 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 生成同一个向量空间.

注 1) 厄米积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 不是可换的, 但满足 a).

2) p 个两两正交的非零向量 $\boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_p$ 线性无关: 事实上, 从 $\sum_1^p \lambda_i\boldsymbol{c}_i=0$ 推出:
$$\boldsymbol{c}_i\cdot\sum\lambda_j\boldsymbol{c}_j=\lambda_i\|\boldsymbol{c}_i\|^2=0,\quad 故\ \lambda_i=0.$$

上面定理的证明给出了依次构造向量 $\boldsymbol{b}_i$ 的方法. 首先正交化向量组 $\boldsymbol{a}_i$, 即构造向量 $\boldsymbol{c}_i$ 如下:
$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}_1=\boldsymbol{a}_1\\
&\boldsymbol{c}_2=\boldsymbol{a}_2+\lambda_2^1\boldsymbol{c}_1,\\
&\boldsymbol{c}_3=\boldsymbol{a}_3+\lambda_3^1\boldsymbol{c}_1+\lambda_3^2\boldsymbol{c}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\boldsymbol{c}_n=\boldsymbol{a}_n+\lambda_n^1\boldsymbol{c}_1+\cdots+\lambda_n^{n-1}\boldsymbol{c}_{n-1}.
\end{aligned}$$

对任意的 λ_p^q, 每一个向量 $\boldsymbol{c}_i$ 不为零. 依次写出 $\boldsymbol{c}_2\cdot\boldsymbol{c}_1=0, \cdots, \boldsymbol{c}_m\cdot\boldsymbol{c}_q=0$, 就可以确定 $\lambda_2^1, \cdots, \lambda_m^q$, 即是 $\lambda_2^1\|\boldsymbol{c}_1\|^2+$

$\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{c}_1=0$ 定出 λ_2^1, 然后

$$\lambda_3^1\|\boldsymbol{c}_1\|^2+\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{c}_1=0 \text{ 与 } \lambda_3^2\|\boldsymbol{c}_2\|^2+\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{c}_2=0$$

定出 λ_3^1 与 λ_3^2, …等等. 其次再将向量组 $(\boldsymbol{c}_i)$ 法化(变成单位向量), 为此令 $\boldsymbol{b}_i=\frac{\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_i\|}$; 这样诸 $\boldsymbol{b}_i$ 就是所求的法正交组.

E_n 中的实纯量积 用 E_n 表示实数体上的 n 维向量空间. 取定 E_n 中一组 n 个线性无关向量后, $\boldsymbol{E}_n$ 的元素或向量 $\boldsymbol{a}$ 就由其实数坐标 (a_i) 确定. 前述理论中唯一要修改的只是纯量积的定义. 纯量积总是记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, 定义为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的实函数, 满足

a) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

b) $\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}_1+\mu\boldsymbol{b}_2)=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1+\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_2$,

λ, μ 是任意实数;

c) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 是正数, 仅当 $\boldsymbol{a}$ 为零向量时为零.

当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时, 也说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交; 当 $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=1$ 时, 也说 $\boldsymbol{a}$ 是单位向量; 仍可如前面一样定义法正交基, 同法证明定理 1, 不过这时不必区别 $\boldsymbol{b}_m\cdot\boldsymbol{b}_k$ 与 $\boldsymbol{b}_k\cdot\boldsymbol{b}_m$, 因实纯量积是可换的.

(C_n 中)厄米纯量积与(E_n 中)实纯量积的性质

a) 在向量 $\boldsymbol{e}_i$ 组成的法正交基 R_0 下将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表出, 则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i,j}a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)=\sum_i\bar{a}_ib_i,\quad \|\boldsymbol{a}\|^2=\sum_i|a_i|^2,$$

故有:

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=\left|\sum_i\bar{a}_ib_i\right|\leqslant\sum_i|a_i||b_i|$$

与

$$\left(\sum_i|\bar{a}_i||b_i|\right)^2\leqslant\sum_i|a_i|^2\cdot\sum_i|b_i|^2,$$

后一不等式是由于 λ 的二次三项式

$$M(\lambda)=\sum_i(|a_i|+\lambda|b_i|)^2\geqslant0,$$

所以判别式非负, 因此

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|. \tag{9}$$

b) 由上推出:

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},$$

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|=(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2,$$

所以

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|. \tag{10}$$

(10)式叫三角形不等式, 其证明既适用于 C_n 中的厄米纯量积, 也适用于 E_n 中的纯量积; 不论哪种情形, (10)式可解释成欧氏几何中的一条定理: 三角形中一边的长小于或等于其他两边的和.

相伴算子 设 T 是本节开头考察过的算子, 即由矩阵 (t_{ij}) 表示的自同态. 相应于 T 有一个算子 T^*, 称为 T 的相伴算子, 定义为

$$T^*\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot T\boldsymbol{b}. \tag{11}$$

易见 T^* 是 C_n 的自同态. 若 T^* 的表示矩阵为 (t^*_{ij}), 在法正交基底 R_0 下将(11)式表出, 则得:

$$\sum_{i,j}t^*_{ij}\bar{a}_jb_i=\sum_{i,j}\bar{a}_jt_{ji}b_i.$$

故关于基底 R_0, T^* 的表示矩阵为:

$$(t^*_{ij})=(\bar{t}_{ji}). \tag{12}$$

由(12)式确定的矩阵 (t^*_{ij}) 称为矩阵 (t_{ij}) 的相伴矩阵这是对 $T=(t_{ij})$ 取转置矩阵 $T'=(t_{ji})$, 再取共轭矩阵而得, 此外转置与共轭这两个运算是可换的. T 的相伴算子 T^* 的定义可以用初等方法提出: 先由(12)式定义相伴矩阵, 然后验证等式(11). 然而, 从(11)式出发直接定义 T^* 具有一般性, 可以推广用来定义具有厄米纯量积的向量空间中任意算子的相伴算子.

不论从(11)出发或(12)出发，都可以证明相伴矩阵的下述性质：

a) $(A^*)^*=A$.

b) $(BA)^*=A^*B^*$.

c) 若 A 是$(n\times n)$正则矩阵，即存在 A 的逆(或者 A 的行列式非零)，使得 $AA^{-1}=I$，或者利用 b)：$(A^{-1})^*A^*=I$；由此$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

厄米算子 现在来重点讨论成为自己的相伴算子的那些算子．算子 T 称为厄米算子(在空间 C_n 中)，如果：

$$\boldsymbol{y}\cdot T\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x},$$

也就是 $T=T^*$．量子力学的算子一般就是这类算子．我们将研究在什么条件下，由矩阵 $A=(a_{ij})$所确定的自同态 $T\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}$ 是厄米算子；因为

$$\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x},$$

或者由(12)，$a_{ij}=\bar{a}_{ji}$，所以 $A=(a_{ij})$是厄米的，必须且只需下列形式

$$\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}=\sum_i(\bar{x}_i\sum_j a_{ij}x_j)=\sum_{i,j}a_{ij}\bar{x}_ix_j,$$

是引言中所说的厄米形式．

E_n 中的对称算子 在空间 E_n 中，坐标是实数，纯量积是实数并且可换，我们说算子 T' 是算子，T 的转置算子，如果：

$$T'\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot T\boldsymbol{b}. \tag{11'}$$

若 T 是 E_n 的自同态，则 T' 也是，T' 的表示矩阵 (t'_{ij})由下式给出：

$$(t'_{ij})=(t_{ji}); \tag{12'}$$

这是 $A=(t_{ij})$的转置矩阵．此外，还有 $A'=A^*$，这是因为矩阵

的元素都是实数，所以其相伴矩阵与转置矩阵一致，算子 T 叫对称的，如果它与其转置重合，在法正交基底 R_0 下，由 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$，$A=(a_{ij})$ 所表示的算子 $T\boldsymbol{x}$ 是对称的，必须且只需 $a_{ij}=a_{ji}$，即矩阵 A 对称. 形式

$$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}=\sum a_{ij}x_ix_j \tag{13}$$

叫 R_0 下该算子的附属形式；两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的函数 $F_1(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$ 称为极形式，它也可写成 $\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}$，因实纯量积是可换的.

特征向量与特征值[注] 设 T 是(O_n中) 厄米算子或者(E_n中)对称算子. 非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得

$$T\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{x} \tag{14}$$

时，称为 T 的特征向量，数 s 叫做该算子的特征值，$\boldsymbol{x}$ 叫属于 s 的特征向量. 用 A 表示在基底 R_0 下 T 的表示矩阵.

特征值与特征向量的性质：

1) 存在 n 个特征值(实的或互异). 事实上，命 I 是单位矩阵，(14) 可以写成 $(A-sI)\boldsymbol{x}=0$. 让左端的 n 个坐标为零，便得 n 个线性方程；仅当

$$D_A(s)=\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-s \end{vmatrix}=0$$

时，方程组才有解 $\boldsymbol{x}\neq 0$. 由于 $D_A(s)=(-1)^n s^n+\cdots$，故至多存在 n 个特征值(相同或不同). 反之，若 s 是 $D_A(s)=0$ 之根，则存在一向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 满足 $A\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{x}$，所以是属于 s 的特征向量.

2) 依定义，特征向量与特征值仅与算子

$$\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x} \tag{15}$$

[注] 见 A. Lichnerowicz 的讲演：线性映射与矩阵.

有关，而与在基底 R_0 下该算子的矩阵表示无关. 后面要证明更精确的性质：如果在R_0下用$A=(a_{ij})$表示T，而在另一基底R_1下用$B=(b_{ij})$表示T，R_0与R_1都是法正交的，则$D_A(s)\equiv D_B(s)$.

3) 每一特征值都是实数. 事实上，从(14)式推出：

$$\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}=s\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=s\|\boldsymbol{x}\|^2,$$

故

$$s=\frac{\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}}{\|x\|^2}=\frac{\phi(\boldsymbol{x})}{\|x\|^2}.$$

若$\boldsymbol{x}$是特征向量，则$\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$也是，所以特征值$s$是厄米形式$\phi(\boldsymbol{x})$在属于$s$的单位特征向量$\frac{\boldsymbol{x}}{\|x\|}$处的值.

4) **属于两个不同特征值s_1与s_2的两个特征向量$\boldsymbol{x}$与$\boldsymbol{y}$正交.**

事实上，从$A\boldsymbol{x}=s_1\boldsymbol{x}$与$A\boldsymbol{y}=s_2\boldsymbol{y}$，并考虑到极形式便推出：$\boldsymbol{y}\cdot A\boldsymbol{x}=s_1\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$，$A\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}=s_2\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$. 故有：

$$(s_1-s_2)\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}=0,\quad\text{或}\quad\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}=0. \tag{16}$$

E_n的情形 上述诸结果继续有效. 3)的证明修改如次：命s是$D_A(s)=0$的根. 无论s是实数或复数，相应地存在一些数x_i(可能为复数)，不全为零，即是n个齐方程的解：$sx_i=\sum_j a_{ij}x_j$，于是有

$$\sum_{i,j}\bar{x}_i a_{ij}x_j=s\sum_i\bar{x}_i x_i=s\sum_i|x_i|^2.$$

由此得到

$$s=\frac{\sum_{i,j}a_{ij}\bar{x}_i x_j}{\sum_i|x_i|^2}. \tag{17}$$

根据$a_{ij}=a_{ji}$知，分子是实数，故s是实数，所以，对称矩阵的特征值是实数.

3. 二次形式与厄米形式化为法式

算子 $\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x})$ 叫酉算子，如果 $\|f(x)\|=\|x\|$. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 叫酉矩阵，如果在法正交基底下由 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 所定义的 C_n 的自同态是一个酉算子，即 $\|A\boldsymbol{x}\|=\|x\|$.

定理 2 矩阵 A 是酉的，必须且只需 $A^*A=I$，I 是单位矩阵.

事实上，若 A 满足：

$$A^*A=I, \tag{18}$$

则由相伴矩阵 A^* 的定义有：

$$\|A\boldsymbol{a}\|^2=A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{a}=a\cdot A^*A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|^2.$$

反之，若对每一向量 $\boldsymbol{a}$，$\|A\boldsymbol{a}\|^2=\|a\|^2$，则有：

$$\begin{aligned}\|A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\|^2&=(A\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b})\cdot(A\boldsymbol{a}+A\boldsymbol{b})\\&=\|A\boldsymbol{a}\|^2+\|A\boldsymbol{b}\|^2+A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

$$\|A(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\|^2=\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},$$

由此：

$$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}+A\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}. \tag{19}$$

用 $\boldsymbol{b}'=i\boldsymbol{b}$ 代替(19)的 $\boldsymbol{b}$ 得

$$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},$$

将上两等式相加得

$$A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{20}$$

因此，保范蕴涵保纯量积．于是得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot A^*A\boldsymbol{b}$$

即是对任意 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\cdot[A^*A\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}]=0$．若将方括弧中的向量取作 $\boldsymbol{a}$，则对每一 $\boldsymbol{b}$ 有 $A^*A\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=0$，故得(18)式.

所以酉矩阵是正则的，即其行列式 δ 非零，因为：

$$\delta\bar{\delta}=1,\ |\delta|=1.$$

E_n 的情形 若将 E_n 视为从点 O 引出的向量集合，则酉自同态是绕 O 的旋转．一个矩阵 A 如果关于法正交基底定义一个酉自同态，就叫做*正交矩阵*，这时，定理 2（证明相同）说：矩阵 A 是正交矩阵的充要条件是：$A'A=I$ 或 $A'=A^{-1}$．

证明变简单了：从(19)式出发，由于实纯量积可换，推出 $A\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即(20)式，其余同上．

注

1) O_n 的酉变换构成一个群，叫做*酉群*；同样，E_n 的正交变换构成*正交群*．这些群是一种特殊的群：每个群运算都由 n^2 个参数（即矩阵 A 的元素 a_{ij}）所确定，对 O_n 这 n^2 个数是复数，对 E_n 是实数，对于运算 $O=O_1O_2$ 即群运算 O_1 和 O_2 之积，相应的参数可以解析地表为 O_1 与 O_2 的参数的函数（只需计算乘积矩阵的项）．这样的群叫做*李群*．

2) 酉矩阵的 n^2 个元素 a_{ij} 之间有某些关系，可以从(18)式得到：令 δ_{ij} 表示单位矩阵 I 的元素（$\delta_{ii}=1$；若 $i\neq j$，则 $\delta_{ij}=0$），将(18)式用元素表出便得

$$\sum_s \bar{a}_{si}a_{sj}=\delta_{ij}. \tag{21}$$

反之，(21)式蕴涵 $BA=I$，而 $B=A^*$，由此：

$$A^*A=I=AA^*. \tag{22}$$

(22)的第二个等式等价于：

$$\sum_s a_{is}\bar{a}_{js}=\delta_{ij}. \tag{23}$$

因此，方程组(21)与(23)等价．在正交群的情形（a_{ij} 为实数），对于 $n=3$，我们重新得到 9 个数构成一个正交矩阵的经典条件．

3) 给了两个法正交基底 R_0 与 R_1，分别由向量 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{e}_i'$

组成，则存在一酉矩阵 S，使得：

$$\boldsymbol{e}_i'=S\boldsymbol{e}_i.$$

事实上，由(6)式，若 $S=(s_{ij})$ 使得：

$$\boldsymbol{e}_i'=S\boldsymbol{e}_i=\sum_j s_{ji}\boldsymbol{e}_j,$$

由此推出： $\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_k'=S\boldsymbol{e}_i\cdot S\boldsymbol{e}_k=\sum_j \bar{s}_{ji}s_{jk}=\delta_{ik}.$

据(21)，这表明 S 是酉矩阵.

如果把任何一个单位向量取作 $\boldsymbol{e}_1'$[注1]，则可确定一个法正交基(定理 1)，从而可以确定一酉矩阵 S，使得：$S\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}_1$ 是事先给出的单位向量.

这个结论(把酉矩阵换成正交矩阵)在 E_n 中仍有效，并且有几何解释.

定理 3 若 A 是厄米矩阵，S 是酉矩阵，则 $B=SAS^{-1}$ 是厄米矩阵.

关于法正交基 R_0，视 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 为厄米算子，我们来证明 $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}$ 也是厄米算子，即要证

$$B\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot B\boldsymbol{y},$$

或者 $$SAS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot SAS^{-1}\boldsymbol{y}.$$

但由于有[注2]

$$A\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\cdot A\boldsymbol{v},$$

若令 $\boldsymbol{u}=S^{-1}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}=S^{-1}\boldsymbol{y}$ 则得

$$AS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot S^{-1}\boldsymbol{y}=S^{-1}\boldsymbol{x}\cdot AS^{-1}\boldsymbol{y},$$

由于(20)式适用于酉矩阵 S 与 S^{-1}，又有

[注1] $\boldsymbol{e}_1'$ 原文是 $\boldsymbol{e}_i$. 改为 $\boldsymbol{e}_1'$ 与上下文才相符：由 $\boldsymbol{e}_1'$ 造出自由组 $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{a}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_n$，再造出法正交基 $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n'$，于是对于 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 存在 S，使 $\boldsymbol{e}_i'=S\boldsymbol{e}_i$，所以 $S\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{a}_1$ 是事先给出的向量.——译者注

[注2] 原文如觉不好理解，可改为：事实上由于(13)适用于 A，而(20)适用于 S 和 S^{-1}，所以 $SAS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=S^{-1}SAS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot S^{-1}\boldsymbol{y}=AS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot S^{-1}\boldsymbol{y}=S^{-1}\boldsymbol{x}\cdot AS^{-1}\boldsymbol{y}=SS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot SAS^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot SAS^{-1}\boldsymbol{y}.$

$$SAS^{-1}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot SAS^{-1}\boldsymbol{y}.$$

同样，若 A 是对称矩阵，S 是正交矩阵，则 $B=SAS^{-1}$ 是对称矩阵.

注 若算子(15)关于法正交基底 R_0 由厄米矩阵 A 表示，关于基底 R_1 由矩阵 B 表示，则 $D_A(s)\equiv D_B(s)$.

事实上，设 S 是酉矩阵，它将 R_0 变成 R_1 使得 $B=(S^*)^{-1}\cdot AS^{-1}=SAS^{-1}$，由此，$D_B=[B-sI]$ 的行列式 $=[SAS^{-1}-SI]$ 的行列式 $=S[A-SI]S^{-1}$ 的行列式 $=D_A$.

厄米形式化为法式 设 $\phi=\sum\limits_{i,j}a_{ij}\bar{x}_ix_j$ 是我们要处理的形式，$\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}$，$A=(a_{ij})$ 是厄米算子 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}$ 在法正交基底 R_0 下的表示矩阵，x_i 是 $\boldsymbol{x}$ 在 R_0 下的坐标，于是 $\phi(\boldsymbol{x})$ 是 R_0 下附属于 T 的厄米形式.

定理 A 在 C_n 内至少存在一法正交基底 R，使得若 ξ_i 是 $\boldsymbol{x}$ 在 R 下的坐标，则 $\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}$ 有如下表达式：

$$\phi=\sum_{i=1}^{p}s_i\bar{\xi}_i\xi_i,\quad p\leqslant n, \tag{24}$$

诸 S_i 是实数.

令 $\boldsymbol{x}_i=\sum\limits_j s_{ij}\xi_j$ 矩阵 $S=(s_{ij})$ 是酉矩阵，则 $\phi=\sum\limits_{s,t}b_{st}\bar{\xi}_s\xi_t$，这里 $B=(b_{st})=S^*AS=S^{-1}AS$.

于是定理 A 的结论等价于：

定理 B 对于厄米矩阵 A，至少存在一酉矩阵 S，使得 $B=S^{-1}AS$ 有对角形式：

$$B=\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & s_2 & \cdots & 0\\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & s_n\end{pmatrix}.$$

诸 s_i 是实数.

我们用下述引理来证明定理 A.

引理 若 $\boldsymbol{a}_1$ 是厄米算子 T 的一个单位特征向量，令 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{u}$ 且 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{u}=0$，则 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ 可分解成如下形式：

$$\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}=s_1x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{v},$$

s_1 是 $\boldsymbol{a}_1$ 所属的特征值；并且还有下列性质：

1) $\boldsymbol{v}=T\boldsymbol{u}$; 2) 与 $\boldsymbol{u}$ 一样，$\boldsymbol{v}$ 也在 $\boldsymbol{a}_1$ 的正交子空间 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ 内；3) $\phi=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}=s_1\bar{x}_1x_1+\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$，这里 $\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$ 是空间 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ 中的厄米形式.

事实上，$T(\boldsymbol{x})=T(x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{u})=x_1T(\boldsymbol{a}_1)+T(\boldsymbol{u})=s_1x_1\boldsymbol{a}_1+T(\boldsymbol{u})$. 又，$\boldsymbol{a}_1\cdot T(\boldsymbol{u})=T(\boldsymbol{a}_1)\cdot\boldsymbol{u}=s_1\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{u}=0$. 从而 $\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}=(x_1\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{u})\cdot(s_1x_1\boldsymbol{a}_1+T\boldsymbol{u})=s_1\bar{x}_1x_1+\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$.

推论 令 $R_1=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 是 C_n 的法正交基底，而 $\boldsymbol{a}_1$ 是 $T\boldsymbol{x}$ 的属于 s_1 的特征向量，则厄米形式 $\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}$ 可分解成：

$$\phi=s_1\bar{x}_1x_1+\phi_1, \tag{25}$$

这里 $\phi_1=\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$ 是至多有 $n-1$ 个变量的厄米形式，相应于算子 T 在 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ 内的迹.

事实上，若对于 R_1 有 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，则 $\phi_1=\boldsymbol{u}\cdot T\boldsymbol{u}$，这里 $\boldsymbol{u}$ 与 $T\boldsymbol{u}$ 均属于坐标为 $x_2,\ \cdots,\ x_n$ 的空间 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$.

讨论 $\boldsymbol{a}_1$ 与 s_1 的存在已肯定(s_1 可能为零)，所以来研究 ϕ_1.

a) 若 $\phi_1\equiv0$，则定理 A 成立，这时 $p\leqslant1$,

$$R=(\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n),$$

$\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n$ 是由 $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{x}=0$ 确定的子空间 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ 中的任何法正交基底. 对于 $k\geqslant2$ 有 $T\boldsymbol{b}_k=0$; 向量 $\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}_n$ 是 T 的属于特征值 $s=0$ 的 $n-1$ 个特征向量. 在这个基底 R 下，我们有 $\phi(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}\cdot T\boldsymbol{x}=s_1\bar{\xi}_1\xi_1$, $x_1=\xi_1$, $D(s)=(-1)^{n-1}(s_1-s)s^{n-1}$.

b) 若 $\phi_1 \neq 0$, 选单位向量 $\boldsymbol{b}_2$ 作 $\boldsymbol{v}=T\boldsymbol{u}$ 的特征向量, T 是 $C_{n-1}(\boldsymbol{a}_1)$ 中的厄米算子; $\boldsymbol{b}_2$ 是 T 在 C_n 中的特征向量, 与 $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$ 正交, 所以关于基底 $R_2(\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2=\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$ 有

$$\phi=s_1\bar{x}_1x_1+s_2\bar{x}_2x_2+\phi_2,$$

ϕ_2 是至多有 $n-2$ 个变量的厄米形式: $\phi_2=\boldsymbol{\omega}\cdot T\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}$ 属于由 $\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{x}=0$ 与 $\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{x}=0$ 确定的子空间 $C_{n-1}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$.

若 $\phi_2\equiv 0$, 则定理 A 成立, 这时 $p\leqslant 2$, $R=(\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$, $\boldsymbol{b}_3, \cdots, \boldsymbol{b}_n$是 $C_{n-2}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ 的任何法正交基底. 若$\phi_2\neq 0$, 继续利用前面的引理与推论, 经过 $p\leqslant n$ 次后, 便得法式(24).

注 指出下列几种不同的提法:

1) 利用定理 3 可以就矩阵进行讨论; 容易获得定理B的形式; $\boldsymbol{a}_1$ 总是 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}$ 的单位特征向量, R_1 是法正交基底$(\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n)$; S 是酉变换, 它将 R_0 变成 R_1, 我们有

$$\phi(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j}a_{ij}\bar{x}_ix_j=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x}(\text{关于 } R_0),\ A=(a_{ij}),$$

$$\phi(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j}b_{ij}\bar{x}'_ix'_j=\boldsymbol{x}\cdot B\boldsymbol{x}(\text{关于 } R_1),\ B=(b_{ij}),$$

$$B=S^{-1}AS.$$

由定理 3 知, B 是厄米矩阵, 故 $B\boldsymbol{a}_1=s_1\boldsymbol{a}_1$ 蕴涵 $b_{11}=s_1$, $b_{1i}=b_{j1}=0(j\geqslant 2)$, $b_{11}=\bar{b}_{11}$. 这就直接确定特征值 s_1是实数; B 由一个$(n-1)\times(n-1)$型厄米矩阵 $B'=(b'_{ij})$, $b'_{ij}=b_{ij}(2\leqslant i\leqslant n, 2\leqslant j\leqslant n)$在其左上角补以 s_1, 其余补以 0 所构成. 假定定理 B 的结论对 $n-1$ 为真, 则存在$(n-1)\times(n-1)$ 型酉矩阵 θ, 使得 $\theta^{-1}B'\theta$ 是一个对角矩阵, 对角线元素为实数 $s_2, \cdots, s_n$; 在 θ 的对角线左上角处补以 1, 其余补以 0 得到的 $n\times n$型矩阵T 是C_n中的酉矩阵; 同样 $S_1=TS$ 也是酉矩阵; 于是 $B'_1=S_1^{-1}AS$ 为对角厄米矩阵, 这就证明了定理 B. 令 $s_1=(s_{ij}^{(1)})$, 代

换 $x_i=\sum_{1}^{n} s_{ij}^{(1)}\xi_j$ 给出 $\phi=\sum_{1}^{n} s_i\bar{\xi}_i\xi_i$，改变脚标的顺序(这相当于作一酉变换)，可以先写出非零项，从而得到定理 A 的形式.

2) 设 $\boldsymbol{\beta}_k$ 是上面定理中得到的基底 R 的向量，它们是 T 的特征向量：$T\boldsymbol{\beta}_k=s_k\boldsymbol{\beta}_k$. 假设它们的次序满足 $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_p$，在定理 A 中若 $p<n$，则 s_{p+1}，…，s_n 是零. 由(24)得：

$$\begin{cases} s_1=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\phi(\boldsymbol{x}), \quad \text{即}\ s_1=\max\dfrac{\phi(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}\|}, \\ s_2=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\phi(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta}_1=0, \\ s_k=\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\phi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta}_j=0,\ (1\leqslant j\leqslant k-1). \end{cases} \tag{26}$$

于是，特征向量 $\boldsymbol{\beta}_k$ 的计算法在于寻求使(26)达到最大的向量 $\boldsymbol{\beta}_k$，并求 $s_k=\phi(\boldsymbol{\beta}_k)$.

我们可以由此得到定理A 的证明，只需利用下面的结论：定义在紧致空间上的多变量连续函数的确在此空间中达到它的上、下确界.

我们有下面的结论：

定理 设 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是单位向量，使 $\phi(\boldsymbol{x})$ 在 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 的条件下取得最大值，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是单位向量，使 $\phi(\boldsymbol{x})$ 在条件 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 与 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta}_1=0$ 下取得最大值，继此以推，$\boldsymbol{\beta}_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是单位向量，使 $\phi(\boldsymbol{x})$ 在条件 $\|x\|=1$ 与 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta}_j=0$，$1\leqslant j\leqslant k-1$ 下取得最大值，若在法正交基底 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_n)$ 下表出 $\boldsymbol{x}=(\xi_i)$，便得法式(24)，诸 s_k 由(26)给出.

事实上，设在基底 R 下 $\phi(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{i,j} b_{ij}\bar{\xi}_i\xi_j$，依定理 3，$(b_{ij})$ 是厄米矩阵. 我们有 $\phi(\boldsymbol{\beta}_1)=s_1=b_{11}$，并且对于 $\|x\|=1$，$\phi(\boldsymbol{x})\leqslant s_1$. 由此可见，对任意的 $\boldsymbol{x}$ 有

$$h(\boldsymbol{x})=\phi(\boldsymbol{x})-s_1\|x\|^2\leqslant 0,$$

$h(\boldsymbol{x})$ 显然是厄米形式. 在 $j\geqslant 3$ 时令 ξ_j 为零，则 $h(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 写成

$$h(\boldsymbol{x})=b_{12}\bar{\xi}_1\xi_2+b_{21}\bar{\xi}_2\xi_1+b_{22}\bar{\xi}_2\xi_2\leqslant 0,$$

这个不等式对任何 ξ_1, ξ_2 成立．令 $\xi_2=\lambda\xi_1$, λ 为实数，那么 $|\xi_1|^2[(b_{12}+b_{12})\lambda+b_{22}\lambda^2]\leqslant 0$ 对任意实数 λ 成立，这要求 $b_{12}+b_{21}=0$, $b_{22}\leqslant 0$. 对于 $\xi_2=i\lambda\xi_1$, λ 为实数，也得 $b_{12}-b_{21}=0$. 最后必有 $b_{12}=b_{21}=0$, 同样对于 $j>1$ 有 $b_{1j}=b_{j1}=0$. 故在 R 下所讨论形式可以写成:

$$\phi(\boldsymbol{x})=s_1\bar{\xi}_1\xi_1+\phi_1(\boldsymbol{x}),$$

这里 $\phi_1(\boldsymbol{x})$ 是厄米形式，只含有变量 ξ_2, $\cdots$, ξ_n. $\xi_1=0$ 时，ϕ 化为 ϕ_1, 将上述方法用于 ϕ_1, 于是，依次确定向量 β_k 作为取最大值的元素，在这些向量组成的基底 R 下，ϕ 必取法式(24).

3) 如果将可换乘法 $\bar{x}_ix_j$ 换成关于加法左、右分配的任何运算，则将 $\phi=\sum a_{ij}\bar{x}_ix_j$ 化成法式(24)的计算无须修改仍然有效．因此，考虑外积($\bar{x}_i\wedge x_j=-x_j\wedge\bar{x}_i$), 我们得到结论：代换 $x_i=\sum\limits_j s_{ij}\xi_j$ 把厄米形式 ϕ 化成法式(24), 也把形式 $\Psi=\sum a_{ij}\bar{x}_i\wedge x_j$ 化为法式 $\Psi=\sum s_i\bar{\xi}_i\wedge\xi_i$.

$\boldsymbol{E}_n$ 的情形　这时由于 x_i 与 $\bar{x}_i$ 相同，除了由此引起的修正外，上述结论与证明可以照搬过来，所以得到

定理　A) 在 E_n 中至少存在一个法正交基底 R, 使得如在 R 下有 $\boldsymbol{x}=(\xi_i)$, 则对称二次形式

$$F=\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{x},\ (a_{ij}=a_{ji}),$$

可化成
$$F=\sum_{i=1}^{p}s_i\xi_i^2,\quad p\leqslant n,$$

诸 s_i 是实数，R 的向量 $\boldsymbol{\beta}_k$ 是对称算子 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ 的特征向量. 变换 $x_i=\sum\limits_j s_{ij}\xi_j$ 由一正交矩阵 $S=(s_{ij})$ 实现.

B) 对于对称矩阵 $A=(a_{ij})$, 存在一正交矩阵 $S=(s_{ij})$, 使得 $B=S^{-1}AS$ 是对角矩阵.

定义 1) 二次形式 F(或厄米形式 ϕ)是正定的, 如果对于任何非零向量 $x=(x_i)$, 有 $F>0$(或 $\phi>0$).

2) F 或 ϕ 是半正定的, 如果 $F\geqslant 0$(或 $\phi\geqslant 0$).

定理 要使 F(或 ϕ)是正定的, 充要条件是它有最大秩 $p=n$, 并且所有特征值 $s_k>0(1\leqslant k\leqslant n)$.

上述结果将用来研究直角坐标下圆锥曲线与二次曲面方程的化简问题. 它们的分类取决于形式的指数与秩[注]. 下面是关于二次曲面的亏格的几点说明: s 的方程的根 s_k 是满足下述条件的参数值 s: 在齐次坐标 x_1, x_2, x_3, x_4 下由 $F(x_1, x_2, x_3, x_4)+s\sum_{i=1}^{3}x_i^2=0$, $x_4=0$ 所确定的(束中的)无限远圆锥曲线已经分解; 根 s_k 首先可表成如下形式: 与二次形式下相应的对称变换 $y=Ax$ 的特征值 s_k, 是使得形式 $F_s=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)+s\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 的秩小于 n 的那些值, 并且只能是那些值. 然后利用这个结果指出: 秩 $p\leqslant 2$ 的形式显然是两个实线性形式或共轭线性形式的乘积.

参 考 文 献

[1] H. Weyl., «Gruppentheorie und Quantenmechanike», Leipzig, 1931, Edition américaine chez Dover.

[2] G. Julia., «Introduction mathématique aux theorie quantiques», Gauthier Villars, 1936.

[3] A. Lichnerowicz, «Algèbre et Analyse linéaires», Masson.

[4] C. Chevalley, «Theory of Lie Groups», Princeton University Press, 1946.

[5] R. Fortet, «Espaces Vectoriels». Cours de M. M. P. édité par le Centre de documentation universitaire, Paris.

[注] 秩为 p, 指数为 $q(0\leqslant q\leqslant p)$ 的二次形式的法式为 $F=-\xi_1^2-\cdots-\xi_q^2+\xi_{q+1}^2+\cdots+\xi_p^2$. ——译者注

第六讲 典 型 群

L. Lesieur （普瓦蒂埃理学院教授）

1. 体 K 上 n 元线性群

令 $K^n=E$ 是向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 组成的向量空间，$\boldsymbol{x}$ 的 n 个分量属于可换体 K. 考虑线性变换 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}$，定义为

$$\begin{cases}x_1'=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\x_2'=a_{21}x_1+\cdots\qquad\qquad+a_{2n}x_n,\\\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\quad\vdots\\x_n'=a_{n1}x_1+\cdots\qquad\qquad+a_{nn}x_n,\end{cases}$$

诸系数 a_{ij} 属于体 K，并且相应的行列式不为零. 所有这样的线性变换构成一个群，称为 *K 上的 n 元线性群*，记成 $GL(n, K)$.

特别，行列式为1的所有线性变换构成 $GL(n, K)$ 的子群，称为 *n 元特殊线性群*，或*么模群*，记成 $SL(n, K)$.

本文要讨论的群是一般线性群的所有子群，K 是复数体或实数体. 按 H. 外尔的命名，这些群称为典型群. 至于任意体的情形是近年研究的对象，其主要结果已汇集于范德瓦尔登的书[2]与[3]和 J. 丢东涅的书[4]与[5]中.

2. 对合线性变换

这种线性变换与它的逆重合，即它的表示矩阵 A 满足：

$$A^2=I,\ \text{其中 } I \text{ 表示单位矩阵.}$$

根据上面关系，$(\det A)^2=1$，故 A 是可逆的.

这些矩阵关于矩阵的加法与乘法具有环的结构，所以关系 $A^2=I$ 可写成

$$A^2-I=0,\ \text{即}\quad (A-I)(A+I)=0.$$

这就使我们来考虑满足下述条件的向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$：

$$(A-I)\boldsymbol{x}=0,\quad \text{即}\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x};$$

$$(A+I)\boldsymbol{y}=0,\quad \text{即}\quad A\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}.$$

满足前一关系的向量构成 E 的一个向量子空间 V，后者构成一个向量子空间 W. 这两个子空间 V、与 W 没有公共的非零向量，因为：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 蕴涵 $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$，即 $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{y}$，由此 $2\boldsymbol{x}=0$，即 $\boldsymbol{x}=0$（对于示性数不是 2 的体，可以施行除以 2 的运算）.

另一方面，V 与 W 生成空间 E，即 E 的每一向量 $\boldsymbol{v}$ 可写成

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\in V,\ \boldsymbol{y}\in W,$$

事实上，我们有：

$$\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{v})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}-A\boldsymbol{v}),$$

这时 $A(\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}$，故 $\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{v}\in V$，而 $A(\boldsymbol{V}-A\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}=-(\boldsymbol{v}-A\boldsymbol{v})$，故 $\boldsymbol{v}-A\boldsymbol{v}$ 属于 W.

这两条性质可表成如下形式：

$$V\cap W=0,\ V\cup W=E^{[注]},$$

并说 V 与 W 互补.

因此有下面定理：

定理1 设 A 是对合线性变换，则存在两个互补的子空间 V 与 W，使得对 V 的每个向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，对 W 的每个向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$.

若 V 是 p 维，则 W 是 $n-p$ 维；在 V 中选基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p\}$，$W$ 中选 $\{\boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$，则变换方程取如下形式：

$$\begin{cases} x_1'=x_1, \\ x_2'=x_2, \\ \quad\vdots \\ x_p'=x_p, \\ x_{p+1}'=-x_{p+1}, \\ \quad\vdots \\ x_n'=-x_n. \end{cases}$$

E^3 中的例子.

$$\begin{cases} x_1'=x_1, \\ x_2'=x_2, \\ x_3'=-x_3. \end{cases}$$ （关于平面 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ 平行于 $\boldsymbol{e}_3$ 的对称变换）.

3. 正 交 群

一个线性变换如果使二次形式：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

[注] 记号 $\cup$ 不是集论中并集的记号，而是格伦中和的记号（参看 L. Dubreil Jacotin, L. Lesieur, R. Croisot, «Théorie des treillis»,1953, p. 9 与 25，例 6）.

保持不变，就称为正交变换.

相应的矩阵 A 叫正交矩阵. 一个矩阵 A 是正交的，必须且只需 A 满足

$$A^T A = I,$$

这里 A^T 表示 A 的转置矩阵(由 A 关于主对角线对称而得的矩阵).

对 $n=2$ 予以验证. 要使变换

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

对于任意的 x_1 与 x_2 满足 $x_1'^2 + x_2'^2 \equiv x_1^2 + x_2^2$，条件是:

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

这条件可表成:

$$A^T A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{是单位矩阵} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此推出 $$\det A = \pm 1,$$

所以，正交矩阵是可逆的. 此外，它的逆是其转置 A^T，并满足: $AA^T = I$，故 A^T 也是正交矩阵.

因为两个正交变换的乘积仍是正交变换，故所有正交变换构成一个群，称为正交群，记为 $O(n, K)$. 有两种正交变换: 行列式为 $+1$ 的称为旋转，构成 $O(n, K)$ 的子群 $O^+(n, K)$，而行列式为 -1 的则称为翻转(当然不构成子群).

若 K 是复数体，则实数体 R 上的实正交群 $O(n, R)$ 显然是 $O(n, K)$ 的子群.

性质 正交变换保持两个向量的纯量积.

向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的纯量积表成

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n,$$

它是向量的坐标的对称双线性形式.

事实上,上面的形式可写成矩阵的乘积:

$$f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(x_1x_2\cdots x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=X^TY.$$

经过变换 A,它变成(根据结合律):

$$(AX)^TAY=(X^TA^T)(AY)=X^T(A^TA)Y=X^TY.$$

子空间 V 的共轭子空间 V^* 是满足下述条件的向量 $\boldsymbol{y}$ 所成的子空间:

$$\text{对每一}\ \boldsymbol{x}\in V,\ f(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=0.$$

V^* 的确是子空间,因为 f 双线性;而上述关系是对称的,故 V 也是 V^* 的共轭子空间.

若 V 只由一个向量 $\boldsymbol{x}$ 生成,则 V^* 是正交超平面. 更一般,若 V 是 p 维,则 V^* 是 $n-p$ 维(事实上,V 由 p 个无关向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_p$ 确定,V^* 是 p 个无关超平面 $f(\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y})=0$ 的交,$i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$).

当 K 是实数体时,我们有 $V\cap V^*=0$,故两个共轭的子空间是互补的. 当 K 是复数体时,结论不真,这时,存在子空间 V,使得 $V\cap V^*\neq 0$,称为迷向子空间.

4. 正交对合变换

设 A 是正交对合矩阵(故 A 满足 $A^2=I$, 由此 $A=A^{-1}=A^T$). 这是一种特殊的对合变换,定理 1 适用. 我们来证明该定理中的 V 和 W 是共轭子空间,从而使结论更加确切.

$\boldsymbol{x}\in V$ 与 $\boldsymbol{y}\in W$ 的纯量积是

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{y})=-f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

由此 $2f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$, 只要体 K 的示性数不是 2.

由此推出 $y\in V^*$, 故 $W\subseteq V^*$. 但 W 与 V^* 有同样的维数 $n-p$, 所以 $W=V^*$. 因此, V 与 W 共轭.

此外, 我们知道 $V\cap W=0$, 故 $V\cap V^*=0$, 所以 V 不是迷向子空间. W 也一样. 由此有:

定理 2 若 A 是对合正交变换, 则存在非迷向子空间 V (可能只有零元), 使得对于 V 的每个向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, 对于共轭子空间 V^* 的每个向量 $\boldsymbol{x}$ 有 $A\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$.

在 V 与 W 内各取一个法正交基底, 便得 E 的一个法正交基底, 使得变换方程取(1)式的形式, 该变换是旋转或翻转依 $n-p$ 是偶数或奇数而定.

5. 对 称 变 换

特别, 当 V 是 $n-1$ 维时, 对合正交变换使 V 保持不变, 称为关于超平面 V 的对称变换(已知 V 不是迷向子空间). 初等几何中由对称变换生成正交群的著名定理, 在复数体 K 或实数体 R 的情形, 已由 E. 嘉当[6]推广至任意的 n, J. 丢东涅又推广至示性数不是 2 的任意体. 即下述定理成立.

定理 3 任意 n 元正交变换是至多 n 个对称变换的积.

对 n 用归纳法就实数体证明. $n=1$ 时显然真, 设 $n-1$ 时定理真. 若存在一向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$, 使得 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, 则 A 使得与 $\boldsymbol{x}$ 共轭的整个超平面 H 不变, A 在 H 上的限制是正交变换, 它是至多 $n-1$ 个对称变换的积. 这就在 E 中定义了一些对称变换, 至多 $n-1$ 个. 若没有一个非零向量是不变的, 考虑

任一向量 $\boldsymbol{x}_0$，则 $A\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{x}_0$ 满足：

$$\varphi(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_0) = \varphi(A\boldsymbol{x}_0).$$

方程为 $f(x, \boldsymbol{x}_0 - A\boldsymbol{x}_0) = 0$ 的超平面定义一个对称变换 S，把 x_0 变成 $A\boldsymbol{x}_0 \neq 0$. 积变换 SA 使 $\boldsymbol{x}_0$ 不变，故是至多 $n-1$ 个对称变换的积，所以 A 是至多 n 个对称变换的积.

6. 酉　　群

任取空间 $E = K^n$，这里 K 是复数体，现在考虑厄米形：

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n,$$

其中，$\bar{x}_i$ 表示 x_i 的共轭复数. 酉变换是保持 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 不变的线性变换，它的矩阵 A 满足关系：

$$\bar{A}^T \cdot A = I,$$

这里 $\bar{A}^T$ 表示 A 的共轭转置矩阵. 故矩阵 A 可逆，其逆是 $\bar{A}^T$，满足 $A\bar{A}^T = I$，故也是厄米矩阵. 两个酉变换的乘积仍是酉变换，故所有的酉变换构成一个群：酉群 $U(n, K)$.

一个酉变换使下列表达式不变：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的厄米纯量积，它是这两个向量的双线性形式，非对称，但满足

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})},$$

故条件 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ 与 $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = 0$ 等价. 这些性质使我们能够定义共轭子空间 V 与 V^*，并将定理 3 扩张至酉群，得出任意酉变换的构造.

行列式等于 1 的酉变换构成酉群与特殊线性群的子群：特殊酉群 $SU(n, K)$.

7. 辛　群

假定空间 E 是偶维：$n=2m$. 向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标是：$x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots, x_m, x_m'$.

对于两个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$，我们考虑相应的

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=x_1y_1'-x_1'y_1+x_2y_2'-x_2'y_2+\cdots+x_my_m'-x_m'y_m,$$

这是两个向量的交错双线性形式：

$$f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})=-f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

保持 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 不变的线性变换称为辛变换，因此它由下式定义：

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}).$$

相应的矩阵 A 称为辛矩阵. 两个辛变换的积仍是辛变换. 为证明辛变换构成一个群，我们来证明辛变换是可逆的.

$n=2$ 时，辛变换就是保持定向面积不变的变换，所以是特殊线性群 $SL(2, K)$ 中的变换. 在 $n=2m$ 的一般情形，考虑矩阵 A 的列向量，即：

$$\boldsymbol{a}_1=A\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{a}_1'=A\boldsymbol{e}_1',\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_m=A\boldsymbol{e}_m,\ \boldsymbol{a}_m'=A\boldsymbol{e}_m'.$$

从关系 $f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=0$, $f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j')=\delta_{ij}$, $f(\boldsymbol{e}_i', \boldsymbol{e}_j')=0$（这里 δ_{ij} 当 $i=j$ 时为 1，$i\neq j$ 时为 0）推出：

$$f(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)=0,\ f(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j')=\delta_{ij},\ f(\boldsymbol{a}_i', \boldsymbol{a}_j')=0.$$

这是 A 为辛矩阵的充要条件. 而向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1', \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_m'$ 是无关的，因为若存在若干 λ 使得 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_1'\boldsymbol{a}_1'+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m+\lambda_m'\boldsymbol{a}_m'$ 为零，则 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1')=\lambda_1=0$，同样对 $1\leqslant i\leqslant m$，$\lambda_i=\lambda_i'=0$. 故矩阵 A 可逆；而且它的逆也保持 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 不变，所以也是辛矩阵. 因此，辛变换构成一个群，称为**辛群** $SP(n, K)$.

如同对正交群一样，我们还可定义共轭子空间 V 与 V^* 的概念，以及满足 $V\cap V^*\neq 0$ 的迷向子空间 V 的概念.

对合辛变换 利用同样的证法，定理 2 可推广至辛群. 但我们可以补充说明一点：对合辛变换的结构中出现的空间 V 与 W 都是偶数维空间.

事实上，V 与 W 都不迷向，而奇数维子空间只能是迷向的：一个由基底 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_{2p+1}$ 确定的奇维空间 U，实际上含有非零向量

$$\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+\lambda_{2p+1}\boldsymbol{e}_{2p+1}$$

属于 U 的共轭子空间. 因为一组 $2p+1$ 个齐次方程

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)=\lambda_1 f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_i)+\cdots+\lambda_{2p+1}f(\boldsymbol{e}_{2p+1}, \boldsymbol{e}_i)=0,$$
$$i=1, 2, \cdots, 2p+1,$$

有奇数阶反对称行列式，故行列式为零，所以方程组有非零解 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2p+1}$，从而给出非零向量

特别，任何一维子空间以及任何超平面都是迷向子空间.

8. 辛 横 截

前面的论证表明不存在辛"对称变换"，但如同把正交对称变换视为保持超平面的向量不变的正交变换一样，我们也可寻求使得超平面的向量保持不变的辛变换.

设 A 是这样的变换，H 是超平面，$\boldsymbol{x}_0$ 是不在 H 上的向量；对于每个向量 $\boldsymbol{x}$ 相应地有 H 的向量 $\boldsymbol{h}$，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_0$ 由此 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{x})A\boldsymbol{x}_0$，相减得：

$$A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}=r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}=A\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0.$$

这个向量 $\boldsymbol{a}$ 是 H 的共轭向量，因为由 A 的定义，对 H 的任意向量 $\boldsymbol{e}$ 有

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e})=f(A\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e})=f(A\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}) -f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e})=0.$$

但由于任何向量都产生迷向子空间，所以 $\boldsymbol{a}$ 属于 H. 因此，对于任何这样的变换 A，存在 H 的共轭向量 $\boldsymbol{a}$ 与不属于 H 的向量 $\boldsymbol{x}_0$，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_0$, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$. 这两个公式就确定了所求的变换. 反之，由这两个公式定义的变换(其中 $\boldsymbol{x}_0$ 不在 H 上，$\boldsymbol{a}$ 是 H 的共轭向量)，正好是一个辛变换，保持 H 的每一向量不变:

$$f(A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+r(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) +r(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})+r(\boldsymbol{x})r(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) =f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\text{[注]}.$$

设 $2m-1$ 个向量 $\boldsymbol{e}_i$ 构成 H 的一个基底(取 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{a}$)，向量 $\boldsymbol{e}_{2m}$ 在 H 之外(取 $\boldsymbol{e}_{2m}=\boldsymbol{x}_0$); 上面的公式给出 $\boldsymbol{h}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_{2m-1}\boldsymbol{e}_{2m-1}$, $r(\boldsymbol{x})=x_{2m}$, 故 $A\boldsymbol{x}$ 的坐标为

$$X_1=x_1+x_{2m},\ X_2=x_2,\ \cdots,\ X_{2m-1}=x_{2m-1},\ X_{2m}=x_{2m}.$$

如上得到的变换称为超平面 H 的辛横截. 上面的方程表明 A 的行列式为 1.

如果两个向量 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{y}_0$ 满足 $f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$，我们可以确定一个辛横截，把 $\boldsymbol{x}_0$ 变为 $\boldsymbol{y}_0$. 事实上，按上面的结果，超平面 H 应是 $\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0$ 的共轭子空间，此超平面不含 $\boldsymbol{x}_0$，A 定义如下:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{x})x_0,\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_0.$$

[注] 注意，由于 $\boldsymbol{a}\in H$ 是 H 的共轭向量，所以 $f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=0$. 此外，由于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}+r(\boldsymbol{x})x_0$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{k}+r(\boldsymbol{y})x_0$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{k}\in H$, 所以 $r(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})=r(\boldsymbol{x})r(\boldsymbol{y})f(x_0, \boldsymbol{a})$, $r(\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y})=r(\boldsymbol{x})r(\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{a}, x_0)=-r(\boldsymbol{x})r(\boldsymbol{y})\cdot f(x_0, \boldsymbol{a})$. ——译者注

9. 辛群的生成

定理 4 每个辛变换 A 是有限多个辛横截的积.

先假设对每个 $\boldsymbol{x}$, 我们有 $f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})=0$. 于是 A 是对合变换, 因为从关系 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))=0$ 有 $f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=f(A\boldsymbol{x}, A^2\boldsymbol{y})$; 由于向量 $A\boldsymbol{x}$ 任意, 故对任意 $\boldsymbol{y}$, $A^2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$, 即 $A^2=I$. 反之亦然, 从 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=-f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ 推出 $f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})=0$. 因此有下列结论:

引理 1 如果对每个 $\boldsymbol{x}$ 有 $f(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})=0$, 则 A 是对合变换; 反之亦然.

在这种情形, 可以考虑出现在对合辛变换的结构中的两个子空间 V 与 $W=V^*$. 设 $A\neq I$, 则有 $W\neq 0$. 因 W 偶维, 并且不是迷向子空间, 所以 W 内存在两个向量 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $\boldsymbol{y}_0$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$. 从 $A\boldsymbol{x}_0=-\boldsymbol{x}_0$ 这就表明 $\boldsymbol{x}\in W$) 推出 $f(A\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\neq 0$, 所以存在辛横截 T 将 $A\boldsymbol{x}_0$ 变成 $\boldsymbol{y}_0$. 同样, $f(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0)\neq 0$ 蕴涵存在辛横截 T' 将 $\boldsymbol{y}_0$ 变成 $\boldsymbol{x}_0$. 由此推出 $T'TA$ 使 $\boldsymbol{x}_0$ 不变.

我们要证明, 在一般情形, 这结果仍真:

引理 2 设 A 是辛变换, 则存在两个辛横截 T 与 T', 使得 $T'TA$ 至少保持一个向量 $\boldsymbol{x}_0$ 不变.

若 A 为对合变换, 引理 2 就是刚才证明的性质. 若 A 不是对合变换, 则由引理 1, 至少存在一向量 $\boldsymbol{x}_0$, 使得 $f(\boldsymbol{x}_0, A\boldsymbol{x}_0)\neq 0$. 故存在辛横截 T 将 $A\boldsymbol{x}_0$ 变成 $\boldsymbol{x}_0$, 因此, 积变换 TA 使 $\boldsymbol{x}_0$ 不变.

现在设 B 是一辛变换, 使 $\boldsymbol{x}_0$ 保持不变.

a) 先设存在 $\boldsymbol{y}_0$, 使得:

$$f(x_0, y_0) \neq 0, f(y_0, By_0) \neq 0.$$

则存在辛横截 T_1 变 By_0 成 y_0, 积变换 T_1B 使 y_0 不变. 向量 x_0 对这个积变换也是不变的. 为证明这点, 只需验明它在辛横截 T_1 的不变超平面上, 即它是 By_0-x_0 的共轭向量. 这由下面等式推出:

$$f(x_0, By_0-y_0)=f(x_0, By_0)-f(x_0, y_0)$$
$$=f(Bx_0, By_0)-f(x_0, y_0)=0.$$

我们刚才不仅就所考虑的情形证明了引理 2, 而且得到更完善的结论:

引理 3 若存在向量 y_0 使得 $f(x_0, y_0)\neq 0$, $f(y_0, By_0)\neq 0$, 则存在辛横截的积变换, 再乘以 A 就使两个向量 x_0, y_0 不变.

b) 现在设, 对于每个满足 $f(x_0, y_0)\neq 0$ 的向量 y_0, 有 $f(y_0, By_0)=0$. 我们要利用一个辛横截, 它将 By_0 不再变成 y_0, 而变成 x_0+y_0. 这个变换 T 的确存在, 因为

$$f(By_0, x_0+y_0)=f(By_0, x_0)=f(y_0, x_0)\neq 0.$$

于是, 变换 $TB=C$ 把 y_0 变成 x_0+y_0, 且

$$f(y_0, Cy_0)=f(y_0, x_0+y_0)=f(y_0, x_0)\neq 0.$$

而且 C 使 x_0 不变, 因为 x_0 属于横截 T 的不变超平面, 后者是由于:

$$f(x_0, By_0-x_0-y_0)=f(x_0, By_0)-f(x_0, y_0)=0.$$

所以两个向量 x_0 与 y_0 使得:

$$f(x_0, y_0)\neq 0, f(y_0, Cy_0)\neq 0.$$

这是应用引理 3 的条件, 由此有结论:

引理 设 A 是任一辛变换, 向量 x_0 和 y_0 满足 $f(x_0, y_0)\neq 0$, 则存在辛横截的积变换, 再乘以 A 就使 x_0 和 y_0 都保持不变.

从这个结论，推证定理4如次．设 P 是由 x_0 与 y_0 确定的平面，x_0 与 y_0 对 C 不变且 $f(x_0, y_0)\neq 0$．此平面 P 不是迷向子空间，它的共轭子空间 P^* 是它的互补子空间，但 P^* 的维数是 $2m-2$．变换 C 使 P^* 不变，它在 P^* 上的限制是我们前面讨论过的辛变换．如果这限制是辛横截的积，那么因为子空间的每个辛横截是 E 的辛横截的限制，故定理得证．但通过关于 m 的归纳法，可归结为2维空间，这时引理成立．定理证毕．

作为定理4的推论，每个辛变换的行列式都为1．因此，辛群 $SP(n, K)$ 是特殊线性群 $SL(n, K)$ 的子群．

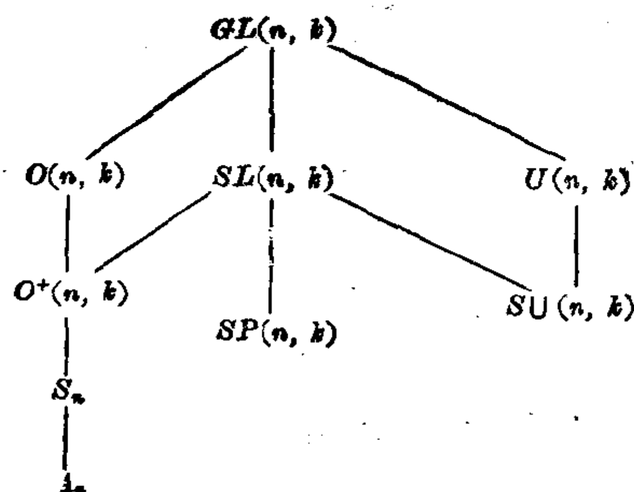
10．对 称 群

n 个元素的有限集合的全体置换所成的群称为对称群 S_n．这是具有 $n!$ 个元素的有限群．它可用 K^n 的线性变换实现；事实上，例如，考虑三个元素的集合 (x_1, x_2, x_3)，置换 $\{x_1, x_2, x_3\}\to\{x_3, x_2, x_1\}$ 可表示成：

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

所以，其矩阵表示的每行、每列都只有一个非零元素，即是1．这对任意 n 也成立．由此，群 S_n 可视为正交群的子群；这个群的旋转有 $n!/2$ 个．相当于偶置换，它们构成 S_n 的子群：交代群 A_n．

[7]中可以找到对这种群的一个总结性研究，也介绍了群表示论及其在物理学中的应用．[8]中可以找到正交群与酉群在算子分析中的应用．最后，将本文中所涉及到的群列表如下：



参　考　文　献

[1] H. Weyl, «The Classical Groups», Princeton, ze édition, 1946.

[2] B. L. Van der Waerden, «Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik», Ergebnisse der Math., 1932.

[3] B. L. Van der Waerden,«Gruppen von Linearen Transformationen», Ergebnisse der Math., 1935.

[4] J. Dieudonné, «Sur les Groupes Classiques», Paris, Hermann, 1948.

[5] J. Dieudonné,«La géométrie des Groups Classiques», Ergebnisse der Math., 1955.

[6] E. Cartan, «Lesons sur la Théorie des Spineurs», Act. Sc. et Ind. n° 643, p. 13～17.

[7] «Conférences du Séminaire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Poitiers», 1954～1955.

[8] M. Janet, «Précis de Calcul Matriciel et Operationnel», Presses Universitaires Collection Euclide, 1954.

练　　习

1．设 R 是一翻转变换，则总存在一向量 $x\neq 0$ 使得 $Rx=-x$. 换言之;任何翻转变换的矩阵都有一个特征值 -1.

2．若 n 是奇数，则一个旋转变换恒具有通过原点不变向量转轴. 换言之: 当 n 为奇数时，$+1$ 是任一旋转变换的矩阵的特征值.

3．证明: 正交矩阵的特征值,即方程 $\det(A-sI)=0$ 的根，都是模

等于 1 的数。

4．设 V 与 V^* 是对合正交变换的结构中出现的子空间（定理 2）．当 V^* 为 2 维时，则 V 是 $n-2$ 维，我们得到一旋转，称为轴 V 的反向变换．证明：$n>2$ 时，每一旋转是反向变换的积．

5．用练习 4 的记号，若 V 是直线，V^* 是超平面，依 n 的奇偶，我们得到旋转或翻转，称为 V 轴的转置．证明：若 n 是奇数，则每个旋转是转置的积；若 n 是偶数，则每个翻转是转置的积（$n\geqslant 3$）．

6．证明 $n=2$ 时，特殊酉群的每一矩阵都由 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ 给出，这里复数 a 与 b 满足 $a\bar{a}+b\bar{b}=1$．

7．设 J 是由主对角线上 m 个块 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 组成的 $2m$ 阶方阵，例如

$$J=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

证明：矩阵 A 是辛矩阵的充要条件为：

$$A^TJA=J.$$

8．证明：一个变换 A 同时是辛变换与对合变换的充要条件为：

$$A^2=I,\ A^TJ=JA,$$

这里 J 是练习 7 中的矩阵．

9．$E=K^n$ 中的基底 $e_1,\ e_1',\ e_2,\ e_2',\ \cdots,\ e_m,\ e_m'(n=2m)$ 经过辛变换产生的基底 $Ae_i,\ Ae_i'(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 称为辛基底．证明：如果 x_1 与 x_1' 是两个任意向量，使得 $f(x_1,\ x_1')$ 非零，则存在一个辛基底，它的前两个向量是 x_1 与 x_1'．

10．证明：矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 是辛横截矩阵（$n=2$）．验证：$-I=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 是三个辛横截的积 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

辛变换 $-I$ 能否只是两个辛横截的积？

第七讲　射影空间

A. Revuz　(普瓦蒂埃理学院教授)

“数学专修班”的优秀生都能正确使用实射影空间，甚至复射影空间．但是，他第一次跟这些概念打交道，几乎总是很苦恼；这种苦恼劲，如果拿我的个人经验来说，可能持续很久．本文的目的与其说是要长篇大论射影空间的技巧，不如说是想把射影空间及其来源空间的关系搞清楚，从而弄清苦恼的根源，有助于消除它．

无穷远元素的引进遭遇到一些困难，这是从自然数直到复数相继扩充数的概念时从未出现过的．第一个困难是：这些扩充的每一个都可以使我们得到被创造出来的那些元素的新性质，而丝毫也不会失掉已有元素的性质(从实数过渡到复数失去有序体的结构是个例外)；反之，引进一个(或两个)无穷远元素就几乎整个地毁灭了实数直线的代数结构．对于这一点，在初等课程里表达得过于简单了，宣称“无穷大不是一个数！”第二个困难涉及扩充的唯一性问题．对于扩充数的概念，这一点是有保证的(确切地说，例如有下述事实：包含自然数的极小阿贝尔群(就加法而言)同构于整数群)，而对无穷远元素而言，唯一性问题并无保证．缺乏严格的基础使学生在含糊的问题面前无言以对，例如下面的问题：复平面和解析几何的平面在有限距离内是重合的，那怎么会一个有无穷远点，而另一个却有无穷远直线呢？

1．射影空间的定义

a）利用把一张平面映成另一张平面的透视映射定义射影空间．设 P 与 P' 是两张不平行的平面，O 是一透视中心．有可能出现一些讨厌的例外：P 上有一条直线，它的点 M 没有像点；P' 上有一条直线，它的点 M' 不是 P 的点的像．然而，就其余的点而言，在 P 的点 M，P' 的点 M' 以及直线 OMM' 这三者之间存在对应关系，只要知道其中任何一项，另外两项便唯一确定．但是在上述两个例外情形中，点 M 或 M' 中有一个是存在的，而从 O 点引出的直线也总是确定的．因此，如果不再着眼于 P 或 P' 的点，而着眼于 R^3 中从 O 引出的直线，就可以排除上述例外情形．为此，我们给出下述定义：二维射影空间 P_2 是三维欧氏空间 R^3 中从一点 O 引的所有直线的集合．射影空间 P_2 中的直线就是 R^3 中过 O 点的平面．

一般定义：假设给了任何一个体 K（可换或不可换）以及左向量空间 K^{n+1}，它是 $n+1$ 个 K 的积空间，与 K 上的任何 $n+1$ 维左[注]向量空间同构．所谓 K 上的 n 维左射影空间，记为 $P_n(K)$，是指 K^{n+1} 中所有齐次直线的集合，即 K^{n+1} 中所有一维子空间的集合．

b）利用齐次坐标定义射影空间．现在让我们主要从解析的观点来讨论．设 K^*_{n+1} 是 K^{n+1} 挖掉原点后的空间（指标的位置在下表示 K^*_{n+1} 不是维数较低的同类空间的积）．在 K^*_{n+1} 中引入下面的等价关系 Δ_n：K^*_{n+1} 中的（非零）向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 等价，如果存在非零的 $t\in K$，使得 $\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{x}$．

相应的等价类就是 K^{n+1} 中除去原点后的齐次直线；因

[注] 或右向量空间。

此，$P_n(K)$与商空间 K^*_{n+1}/Δ_n 之间存在一一对应，所以可以把两者看成一样.

K^*_{n+1} 的元素由其坐标 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 给定，所以 $P_n(K)$ 的元素由 $n+1$ 个元素 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 给出，这是射影空间中点的一组"齐次坐标，除了一个因子不计外是完全确定的.

2. 射影空间的结构

原来的向量空间结构经过这样处理以后还剩下什么呢？如果我们从一个群出发，考虑关于这个群的合成法则是正规的等价关系，那么所得到的商结构仍然是一个群：商群．但是在射影空间的情形，我们的出发点是一个向量空间，去掉了群运算的中性元素，而且，等价关系关于群的合成法则也不是正规的($\boldsymbol{x}$ 等价于 $\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{y}$ 等价于 $\boldsymbol{y}'$ 并不蕴含 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 等价于 $\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$)．至于纯量乘法，由于它使等价类保持不变，所以并不产生射影空间中相应的运算.

那么还剩下什么呢？，让我们想想讨论的出发点，想想把平面映成平面的透视映射吧．剩下的东西不过就是共线的点吧了．在更一般的空间中，我们指出，若K^*_{n+1}的 p 个元素线性无关，即 $\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\lambda_p\boldsymbol{x}_p=0$ 蕴含 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_p=0$，则与 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 分别等价的 p 个元素 $\boldsymbol{x}'_1, \cdots, \boldsymbol{x}'_p$ 显然也线性无关．相应的诸等价类叫做 P_n 的**射影无关点**.

射影线性簇　设 φ 是把 K^*_{n+1} 映成 P_n 的标准映射：对于 K^*_{n+1} 的每一元素 $\boldsymbol{x}$，相应的 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 是它的模 Δ_n 类．我们总是把K^*_{n+1} 中的"线性对象"关于 φ 的像定义为"射影对象"，例如，p 维射影线性簇就是 K^*_{n+1} 的 p 维子空间 V_p 的标准像 $\varphi(V_p)$．由此推出，若 P_n 的 p 个点射影无关，则含有它的最小射影线

性簇是 $p-1$ 维的.

射影空间的公理化 射影空间中射影无关的概念恰好是可以从它出发构造射影空间理论的唯一概念. 这一点 Lesieur 给出了一个极好的表述, 此外, 他还用序结构的语言定义了无关性[注1].

上面的说明基于下述事实: $P_3(R)$ 的所有射影线性簇, 例如空集与全空间 $P_3(R)$ 都算在内, 按包含关系确定的序关系, 构成一个格, 这就是说: 给了两个簇 A 与 B, 则所有含于 A 与 B 的簇中存在一个最大的簇, 记为 $\inf(A, B)$, 或 $A\cap B$, 称为 A 与 B 的交[注2]; 所有包含 A 与 B 的簇中存在一个最小的簇, 记为 $\sup(A, B)$ 或 $A\cup B$, 称为 A 与 B 的和[注2]. 格有最小元素, 即是空集, 也有最大元素, 即是全空间.

于是, Lesieur 提出如下公理:

I 射影空间的线性簇构成一个格, 这个格有最小元素 0 与最大元素 1. 序关系记为 $A\leqslant B$, 可以读作: A 囿于 B, 或 B 超过 A. 盖住 O 的元素称为点[注3].

II 若点 P 不囿于簇 B, 则 $B\cup P$ 盖住 B.

III 任何一个簇 $A\neq 0$ 所超过的点的集合非空, 并且 A 是其中有限多个点的和.

于是, 无关性的概表述成: $n+1$ 个点是相关的, 如果其中至少有一个点囿于其余 n 个点的和中. 相反的情形则称为无

[注1] L. Dubreil Jacotin, L.Lesieur, R.Croisot, «Théorie des Treillis», Paris, 1953, pp. 249～371.

[注2] "交"原则上是指格论中的交, 不过现在和集论中的交一致, 只要把簇视为它所包含的点的集合即可. 但"和"则是格论中的运算, 在这里是与集论中的并集不同的.

[注3] 元素 a 盖住另一个元素 b, 如果 a 严格大于 b, 并且 a 与 b 之间不存在任何元素.

关.

我们指出,如果无关点的和是一个簇,则点的个数只依赖于这个簇,而不依赖于所选的无关点,即使有很多可能的选择.这个簇的维数就是无关点的个数减一.

若 n 是全空间(格的最大元素)的维数,则 $n-1$ 维簇称为超平面.

于是有下面第四个公理:

IV 若 A 不囿于超平面 H,则 A 盖住 $A\cap H$.这是 II 的对偶公理(若颠倒格的序关系,就是 II).

这四条公理有一个重要的推论,就是簇的维数满足下述恒等式

$$\mathrm{d}(A\cup B)+\mathrm{d}(A\cap B)=\mathrm{d}(A)+\mathrm{d}(B).$$

正是从这些最简单的概念出发,使理论逐步充实以新的公理,就能从新建立起古典的射影几何,甚至仿射几何.

现在我们要抛开公理的观点.提出这种观点只是为了强调射影空间理论的实质,以及这种观点产生的理论的优美.

3. 射 影 映 射[注]

设有同一个体 K 上的两个映影空间 P_m 与 P_n,维数分别为 m 与 n,它们是从除去了一点的向量空间 K^*_{m+1} 与 K^*_{n+1} 出发定义的.又设 φ 与 ψ 是标准映射,分别把 K^*_{m+1} 映成 P_m,把 K^*_{n+1} 映成 P_n.对于把 K^{m+1} 映入 K^{n+1} $(m\leqslant n)$ 的任何单值线性映射 f,我们可以"求商"相应地得到一个射影映射 g,把 P_m 映入 P_n,g 由下列等式定义:

[注] 这里简称为射影映射的概念,就是通常所说的射影线性映射.因为我们只考虑这种映射,故不致混淆.

$$g\circ\varphi=\psi\circ f$$

这些映射适合下列图表：

$$\begin{array}{ccc} K^*_{m+1} & \xrightarrow{f} & K^*_{n+1} \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ P_m & \xrightarrow{g} & P_n \end{array}$$

P_m 的一点 $\boldsymbol{x}$ 是 K^*_{m+1} 的一条"直线"对于 φ 的像，该直线对于 f 的像是 K^*_{n+1} 的直线，它对于 ψ 的像是 P_n 的点，按定义此点就是 $\boldsymbol{x}$ 对于 g 的像. P_m 的 p 维射影簇是 K^*_{m+1} 的 p 维（挖去 O 的）向量子空间对于 φ 的像，由此推出：射影簇对于射影映射的像是同样维数的射影簇.

推广：半线性映射. 可以将上述理论推广到一般情形，其中射影空间是定义在两个不同但却同构的体 K 与 K' 上. 设 σ 是 K 与 K' 之间的同构映射，λ^σ 是 $\lambda\in K$ 在 K' 中的像. 于是，所考虑的 f 就是与同构映射 σ 相应的半线性映射，它把 K 上的右向量空间 E 映入 K' 上的右向量空间 E'，即对任何 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in E$ 和 $\lambda\in K$ 有

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}),\ f(\boldsymbol{x}\lambda)=f(\boldsymbol{x})\lambda^\sigma.$$

如果 f 是一一的，则如上求商由 f 导出的映射称为相应的射影空间之间的射影映射.

现在我们可以在最一般的形式下陈述并证明射影几何的基本定理.

定理 设 E 与 E' 分别是体 K 与 K' 上的两个右向量空间，具有相同的维数 n；P 与 P' 是相应的射影空间. 如果存在把 P 映成 P' 的一一映射 g，使得 P 的任意共线三点的像是 P' 的共线三点，又若 $n\geqslant 3$，则有：

1) K 与 K' 同构（用 σ 表示同构映射）；

2) g 是射影映射，由一个与 σ 相应的把 E 映成 E' 的一一半线性映射 f 求商而得.

注意，定理的结论有力地确认了前面提出的观点：射影空间理论的实质包含在无关点的概念中.

证明[注] 我们用 xK 表示 P 的点，它是 E 的点 x 的标准像(对于 E', P', K' 有类似的记号).

1° P 维簇 V 的像 $g(V)$ 是 p 维簇. 设 $a_iK(1\leqslant i\leqslant p+1)$ 是生成 V 的射影无关点组；由于共线点的像仍共线，所以 $g(V)$ 含于 $g(a_iK)$ 生成的簇 V' 内. 但是，另一方面，由 $g(P)=P'$ 推出，无关点组的像仍是无关点组：事实上，假设诸 $g(a_iK)$ 不是无关的，则将诸 $a_i(1\leqslant i\leqslant p+1)$ 扩充成 E 的一个基底 $a_1, \cdots, a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots, a_n$，像 $g(a_iK)(1\leqslant i\leqslant n)$ 就张成一个维数 $<n-1$ 的簇，这簇应该含有 P'，因为 $g(P)=P'$，但这是荒谬的，因为 $d(P')=n-1$. 于是 $g(V)=V'$，否则 V' 含有形如 $g(aK)$ 的元素，这里 aK 与 $a_iK(1\leqslant i\leqslant p+1)$ 射影无关. 由 V 与 aK 生成的簇 V_1 有维数 $p+1$，于是它的像含于维数为 p 的 V' 中.

2° K 与 K' 同构. 设 $(e_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 E 的一个基底，e_1K, e_2K 与 e_nK 是 P 的点，e'_1K', e'_2K' 与 e'_nK' 是这些点关于 g 的像. 由 1° 推得，e'_1, e'_2 与 e'_n 在 E' 中线性无关. 设 D 是 e_1K 与 e_2K 生成的射影直线，D' 是它的像；F 是 D 与 e_nK 生成的射影平面，F' 是它的像. F 中不在 D 上的每一点可唯一地写成 $(e_1\alpha_1+e_2\alpha_2+e_n)K$. 因此，我们可以把 D 在 F 中的补子空间与 K 上由 e_1, e_2 生成的右向量空间 L 等同(D 取作无穷远直线). F 中与 D 不同的每一条射影直线相当于 L

[注] 作为证明，我们引用 J. Dieudonné, «La Geometrie des Groupes Classiques», Berlin, 1955.

的一直线，F 的两条直线在 D 上相交，各被对方分成两条直线，其中一条由另一条平移而得(这两条直线称为平行直线，也可通过"位似"由一条得到另一条)．D' 在 F' 中的补子空间与 e_1' 和 e_2' 生成的向量空间 L' 之间也可作类似的等同．于是，对于映射 g，相应地有一个把 L 映成 L' 的一一映射 u，把每一条直线变成直线，把两条平行直线变成直线，并且 $u(0)=0$，$u(e_1)=e_1'$，$u(e_2')=e_2'$．因此，通过在 L 中构造平行直线，由 K 的两个元素 α，β 出发，容易得到元素 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha\beta$，它们是由 e_1 生成的直线上的点的横坐标(见图 1 与 2)．由于 u 保持平行性不变，若令 $u(e_1\xi)=e_1'\xi^\sigma$，显然可见，映射 $\xi\to\xi^\sigma$ 是把 K 映成 K' 的一一映射，并保持和与积不变，这就是所求的同构映射．

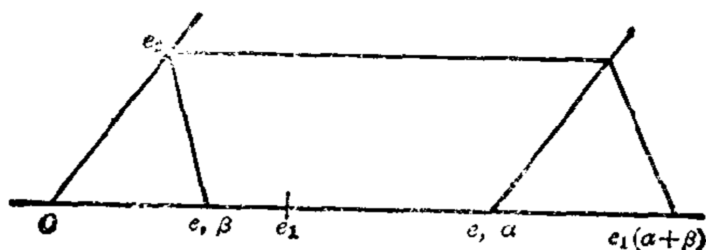


图 1

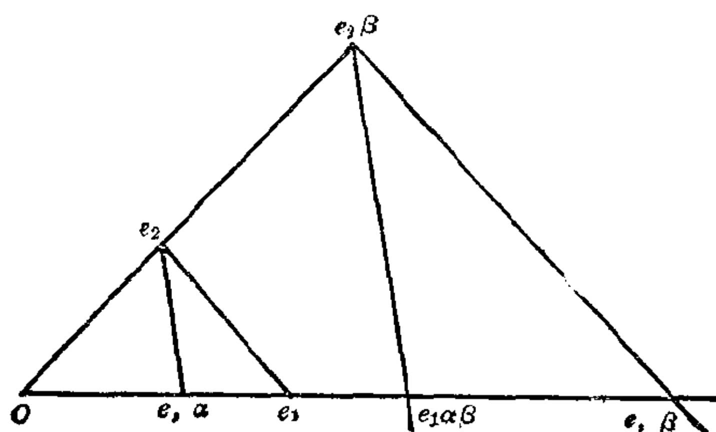


图 2

3° g 是射影映射．联结 $e_1\xi$ 与 $e_2\xi$ 的直线在 L 中平行

于联结 e_1 与 e_2 的直线，故有 $u(e_2\xi)=e_2'\xi^\sigma$. 另一方面，L 的点 $e_1\alpha+e_2\beta$ 是过 $e_1\alpha$ 与 $e_2\beta$ 各引 e_2 与 e_1 的平行线而得的，故也有

$$u(e_1\xi+e_2\eta)=e_1'\xi^\sigma+e_2'\eta^\sigma,$$

即 u 是对应于 σ 的一一半线性映射，把 L 映成 L'.

上述论证对于 P 的任何一对点 e_iK, e_jK 也成立. 若用 v 表示对应于 σ 的一一半线性映射，使得 $v(e_i)=e_i'$, h 表示相应的把 P 映成 P' 的射影映射，则 $h^{-1}\circ g$ 是把 P 映成自身的映射，它把每一直线变成直线，并使联结两点 e_iK、e_jK 的直线上的各点不变. 这是一个恒等变换. 故有 $g=h$.

注 $n=2$ 时，定理不真. 在 $K=K'=R$ 的情形下，射影变换的特征是保持两方比例不变.

4. 射影空间的拓扑结构

若向量空间 E 具有拓扑结构，则求商立即得到相应射影空间的拓扑结构，实射影空间或复射影空间(即定义在实数体或复数体上的射影空间)就是这样得到的.

作为结束，我们引述下面的重要结果：$P_n(R)$ 同胚于把对径点粘合起来的球面 S_n; $P_n(R)$ 同胚于把边界球面 S_{n-1} 的对径点粘合起来的球体 B_n; $P_n(R)$ 是紧致连通空间.

第二编 拓 扑 结 构

第一讲 数直线及其基本拓扑性质

G. Choquet （索尔本大学教授）

1. 引　言

一般拓扑学是由于人们关心没有解析表达式的函数，感到有必要对连续函数给以精确的定义时应运而生的． 今天，我们仍然可以说，一般拓扑学在于研究收敛与连续的概念．

实数集合 R 是第一个定义了这些概念的集合，不论就理论研究还是就应用而言，现在也仍然是最重要的集合．

本文要讨论的正是 R 的定义及其拓扑结构．

2. 集合 R 是交换群，全序集，连续集

在讨论 R 的拓扑结构之前，我们先回顾它的基本性质；确切说，我将把 R 定义为具有这些基本特性的代数结构与序结构的集合．

定义 1 集合 G 是一个全序交换群，如果：

1) G 具有一个内运算，记为 $+$，使得 G 成为交换群；

2) G 具有一个全序结构，记为 $\leqslant$；

3) 上述加法与序关系是相容的，即对每个 x，$a\leqslant b$ 蕴涵 $a+x\leqslant b+x$．

显然, 关系 $a\leqslant b$ 等价于 $0\leqslant(b-a)$.

例子 全体整数的集合 Z; 有理数集 Q; 实系数多项式 $p(x)$ 的集合 P, 其中序关系是: 若 p_2-p_1 的最低次项的系数 >0, 则 $p_1<p_2$.

定义 2 全序集 E 是连续的, 如果:

1) E 的每个开区间 (a, b) 至少含有一点(故也含有无限多点).

2) E 的每个有上界的子界 X 都有一个上确界[注1].

整数集 Z 满足性质 2), 但不满足 1). 有理数集 Q 正好相反.

当 R 已定义时, 可以证明 R 的每个子区间是连续的. 同样, 令 E 是偶对 (a, b) 的集合, 这里 $a\in[0, 1]$, $b\in[0, 1]$; 定义序关系如下:

$(a, b)\leqslant(a', b')$, 若 $a<a'$ 或者 $a=a'$, $b\leqslant b'$. 则全序集 E 是连续的.

易知, 若 E 连续, 则 E 的每个有下界的子集具有一个下确界, 它就是 X 的下界集合的上确界.

我们将看到, 在同构的意义下, 定义 1 与 2 使集合具有唯一结构. 准确说, 我们有:

定理 1 设 G 与 G' 是两个连续的全序交换群, 每一个含有的元素都不止一个. 则对任意的 $a\in G$, $a'\in G'$, $a>0$, $a'\geqslant 0$, 存在唯一一个把 G 映入 G' 的增表示 f[注2], 使得 $f(a)=a'$. 当 $a'\neq 0$ 时, f 是同构; 当 $a'=0$ 时, 对所有 x 有

[注 1] 如果对每个 $x\in X$, 有 $x\leqslant a$, 就说 a 是 X 的上界. 如果 X 的所有上界中有一个最小的, 这个最小上界称为 X 的上确界. 同样定义下界与下确界的概念.

[注 2] 即 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $(x\leqslant y)\Rightarrow(f(x)\leqslant y)$.

$f(x)=0$.

当 $a'\leqslant 0$ 时，把"增"字改为"降"字，可得类似结果.

这个定理的证明是模仿确立指数存在的经典初等证明.

首先证明 G（以及 G'）的每个区间都具有一个中心，由此可定义 G 的元素 $(p/2^r)a$ 的集合 A；集合 A 在 G 上处处稠密[注]，f 在 A 上的定义是 $f\left(\frac{p}{2^r}a\right)=\frac{p}{2^r}f(a)$. 然后将 f 扩张至整个 G.

注 设 f 与 g 是把 G 映入 G' 的两个单调表示，h 是 $h(x)=f(x)+g(x)$ 定义的映射. h 显然是一表示. 另一方面，如果 $h(a)\geqslant 0$ $(a>0)$，则对 A 的每个元素 $x\geqslant 0$ 也有 $h(x)\geqslant 0$，于是对所有的 x，$h(x)\geqslant 0$.

因此，把 G 映入 G' 两个单调表示的和仍是单调表示；准确地说，这些表示构成一个群，并与 G' 同构.

表示群的存在

定理1是基本的，因为它表明，除去同构不计外，所研究的群是唯一的. 不过它没有建立群的存在性；有种种方法证明这个群的存在.

例如，G 是无限十进制展开的集合，具有通常的加法；这种方法的弱点在于：必须取消从某一位开始只含 g 的展开. 对二进制展开亦然.

更古典的方法是从有理数或二进制有理数所成有序交换群 Q 出发，利用柯西序列方法或戴德金分割方法使 Q 完备化.

下面介绍一种比较方便的分割方 ，排除了存在三类分割的麻烦.

序加群 Q 的任何非空子集 s 称为 Q 的起端，如果：

[注] 即 G 的每个非空开区间都含有 A 的点.

1) $x<y$ 和 $y\in s$ 蕴涵 $x\in s$;

2) s 不含最大元素, $s\neq Q$.

例如, 对于每个 $a\in Q$, 满足 $x<a$ 的集合 s_a 就是一个起端.

设 S 是所有起端的集合; 包含关系在 S 中定义一全序关系, 这关系是连续的, 因为任意多个起端的并集也是一个起端, 否则就等于 Q.

在 S 上定义加法如下:

$s_1+s_2=(x_1+x_2)$ 的集合, 这里 $x_1\in s_1$, $x_2\in s_2$.

于是 S 在上面的序关系与加法下构成一个连续的全序交换群, 含有一个处处稠密的子群, 这个子群同构于 Q, 同构对应是 $a\to s_a(a\in Q)$, 一般就将这子群与 Q 等同.

我们就是要把集合 S 叫做数直线 R.

3. R 上的体结构

在刚才定义的数直线 R 上, 现在还只有单独一个运算: 加法; 此外, 还可在 R 内定义乘法. 为此, 只需把其处处稠密的子集 Q 上已有定义的乘法扩张至 R 即可. 这种构造是经典的.

但是, 我们要使用另一种方法, 它基于定理 1, 特别着眼于乘法的特性, 把乘法视为一种运算在这点上和某些初等方法比较接近.

定义 3 集合 K 称为全序交换体, 如果 K 具有交换体的结构, 以及与 K 的代数结构相容的全序结构(用 $\leqslant$ 表示), 即:

1) $a\leqslant b$ 蕴涵对每个 x 有 $a+x\leqslant b+x$;

2) $0 \leqslant a$ 与 $0 \leqslant b$ 蕴涵 $0 \leqslant ab$.

我们用 K_{+} (相应地 K_{+}^{*})表示 K 中 $x \geqslant 0 (x>0)$ 的集合.

定理 2(存在性与唯一性) 设 G 是连续的全序交换群(用加法记号),则对 G 的每个元素 $e>0$, G 都有唯一一个体结构,使得它的加法就是 G 的加法,它的单位元是 e 并且

(1)$_m$ $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$ 蕴涵 $0 \leqslant ab$.

这个体是交换的.

我们假设了 $e>0$ 因为在全序体中, 每个平方 $x^2 \geqslant 0$; 因此,若 e 是单位元, 则 $e=e^2>0$.

唯一性 设 G 具有满足上面条件(1)的体结构, 用 xy 表示 x 与 y 的乘积.

设 $a>0$ 是 G 的一个元素. 由 $x \mapsto ax$ 定义的映射 f 是把群 G 映成自身的同构, 不等式(1)表明, f 是增表示; 而 $f(e)=a$, 因此, 由定理 1, 这个映射 f 由 a, e 以及 G 的群结构完全确定.

若 $a<0$ 有同样结论, 因为在任何体中, $ax=-(-a)x$, 故乘积 ax 由 a, e, G(及 x)完全确定.

换言之,若在 G 上存在满足条件(1)的体结构, 则它完全由单位元的选取确定.

存在性 剩下要证明: G 的确有这样的体结构, 并且这个体是交换的.

上面的证明,启发我们把乘积 ax 定义成 x 对于把 e 变成 a 的增表示或降表示的像. 确切地讲,就是令 $ax=f_a(x)$.

现在证明,有了如上乘法 G 就成为有序交换体:

1) $f_a \circ f_b$ 是单调表示.

因为, $f_a(f_b(e))=f_a(b)=ab$, 所以 $f_a \circ f_b=f_{ab}$.

由此推出 $f_a(f_b(c))=f_{ab}(c)$, 故 $a(bc)=(ab)c$, 换句话

讲，乘积是结合的.

2）因 f_e 是恒等映射，故对于每个 b，有 $eb=b$；另一方面，$be=b$，所以 e 是单位元.

3）对每个 $a\neq 0$，f_a 是把 G 映成 G 的同构映射，故存在元素 a'，使得 $f_a(a')=e$，因此有 $aa'=e$，这蕴涵 $a'a=e$ 因为，如果 $a'a=u$，则 $aa'a=au$ 即 $a=au$，从而 $u=e$（因 f_a 是一一的）.

换句话讲，a 具有逆元素.

4）关系 $f_a(x+y)=f_a(x)+f_a(y)$ 成为

$$a(x+y)=ax+ay.$$

今再证明

$$(a+a')x=ax+a'x.$$

事实上，映射 $x\to(a+a')x$ 就是 $f_{a+a'}$ 映射 $x\to ax+a'x$ 是两个单调表示 f_a 与 $f_{a'}$ 之和，根据上面的注，也是一个单调表示，用 g 表示. 因为映射 $f_{a+a'}$ 与 g 在点 e 取同一值，故它们相同.

所以我们证明了乘法对加法的分配律.

上面证明的乘法性质表明，这个乘法在 G 上确定一个体结构. 下面证明这个体是交换的.

5）为此，只需证明映射 $x\to ax$ 与 $x\to xa$ 恒同. 例如，设 $a>0$. 第一个映射是 f_a，设 φ_a 为第二个映射. 已证 $(x+y)a=xa+ya$；另一方面，对每个 $x\geqslant 0$ 有 $xa\geqslant 0$，故 φ_a 为单调表示. 因 $\varphi_a(e)=f_a(e)$，故得 $\varphi_a=f_a$.

6）最后，注意，关系 $0\leqslant a$ 与 $0\leqslant x$ 蕴涵 $0\leqslant ax$，于是定理证毕.

推论 设 K 与 K' 是两个连续的全序交换体，则存在把 K 映成 K' 的唯一的增同构映射.

这个同构映射就是把有序加法群 K 映成有序加法群 K' 的同构映射，把 K 的单位元映成 K' 的单位元.

体 R 根据上面的推论，我们可以把任何连续的全序交换体叫做实数体. 不过我们还是把这个名称留给使加群 R 的乘法单位元为 $e=1$ 的那个体.

指数与对数 集合 R_+^* 对于乘法是连续的全序群，所以根据定理 1，同构于加群 R.

把 R 映成 R_+^* 并满足 $f(1)=a$ 的单调同构映射 f，称为以 a 为底的指数. 逆映射 f^{-1} 是以 a 为底的对数；这两个映射当 $a>1$ 时是增映射，$a<1$ 时是降映射.

从 R 与 R_+^* 的同构推知，R_+^* 的每个元都是平方，这使上述推论变得很确切. 事实上，设 f 是一把 K 映成 K' 的代数表示[注]，对每个 $x\geqslant 0$，有 $x=y^2$，故 $f(x)=f(y^2)=(f(y))^2\geqslant 0$，所以 f 是增表示. 这是一个增同构，除非对每个 x，$f(x)=0$.

特别，对把体 R 映入自身的任何代数表示 f，对每个 x 有 $f(x)=x$，否则对每个 x 有 $f(x)=0$.

4. 开集，闭集，点的邻域

我们刚才对 R 的代数结构与其序结构之间的讨论，可能使人以为，弄清这关系是定义和研究 R 的拓扑结构所必不可少的. 我们将看到，根本不是这么回事，R 的拓扑结构可以只从序关系出发来定义. 这就让人猜测，任何全序集的拓扑结构都可以用类似方法来定义. 我们可以很容易验证情况正是如此.

R 中的开区间是指任何形如 $(a,\ b)\ (a<b)$，$(-\infty,\ a)$，

[注] 即不预先假设 f 是增表示.

$(a, +\infty)$的集合，以及 R 和 ϕ. 这些集合的定义是熟知的，只需用到 R 上存在序关系.

易见，两个开区间的交仍是开区间.

定义 4 R 的子集 A 称为开集，如果它是一族(有限或无限多个)开区间的并集.

也可以这样定义开集 A，如果对每个 $x\in A$，存在一个包含 x 的属于 A 的开区间.

容易推出下列性质：

O_1: 任何(有限或无限多个)开集的并集仍是开集.

O_2: 任意有限多个开集的交集仍是开集.

O_3: R 与 ϕ 是开集.

性质 O_1 与 O_3 是明显的，O_2 由如次性质推出：任意有限多个开集的交集仍是开集.

从定义还可推得：每个开区间都是开集.

注 无限多个开集的交集未必是开集：例如，开区间 $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)(n=1, 2, \cdots)$的交集是一点集$\{0\}$，这不是开集.

定义 5 当 R 的子集 A 的补集是开集时，称 A 是闭集.

使用如下对偶公式：

$$C(\bigcup_i A_i)=\bigcap_i (CA_i), \quad C(\bigcap_i A_i)=\bigcup_i (CA_i),$$

从性质 O_1, O_2 与 O_3 立即推得闭集的对偶性质：

F_1: 任意多个闭集的交集是闭集.

F_2: 任意有限多个闭集的并集是闭集.

F_3: ϕ 与 R 是闭集.

闭集的例子 1) 每个闭区间$[a, b]$是闭集；事实上，它的补集是开区间$(-\infty, a)$与$(b, +\infty)$的并集.

2) 任意有限多个闭区间的并集是闭集(因此，特别有每

个有限集是闭集).

3) 闭集的一个著名例子是康托的三分集. 用递推定义 A_n: $A_1=[0, 1]$; $A_2=\left[0, \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}, 1\right]$; A_{n+1} 是从组成 A_n 的每个闭区间中除去中间三分之一那个开区间得到的集合. 每个 A_n 都是闭集; 要求的康托三分集 A 就是这些 A_n 的交集.

容易证明, A 是 $[0, 1]$ 中按照三进位计数法其展式只含有数字 0 与 2 的那些集合

稍后, 我们要用聚点的概念对闭集的特点给出一个有趣说明.

定义 6(邻域的定义) x 是 R 的一点, R 的子集 V 称为 x 的邻域, 如果 V 含有一个包含 x 的开集.

换句话说, 如果 V 包含一个含有 x 的开区间, V 就是 x 的邻域.

例如, 任何开集 A 都是其中每一点的邻域. 反之, 任何集合 A, 如果是其中每一点的邻域, 它就是开区间的并集, 所以是开集. 因此开集与邻域的概念是互通的.

下面是 R 中点的邻域的简单性质:

V_1: x 的每一邻域含有 x.

V_2: 包含 x 的一个邻域的任一集合仍是 x 的一个邻域.

V_3: x 的两个邻域的交集仍是 x 的一个邻域.

V_4: x 的每个邻域 V 都包含 x 的另一邻域 W, 使得 W 的每一点以 V 为邻域.

V_5: R 的两个相异点 a 与 a' 有两个互不相交的邻域 V 与 V'.

性质 V_1, V_2, V_3 是明显的. 为证明 V_4, 只需取含有 x 并含于 V 的开集作为 W 即可.

为证明 V_5，设 $a<a'$，b 在 a 与 a' 之间．于是只须取 $V=(-\infty, b)$，与 $V'=(b, +\infty)$ 即可．证明直线上的点列至多只能收敛于一个点，正是利用了性质 V_5．

集合的接触点与聚点

设 A 是 R 的子集，$x\in R$

如果 x 的每个邻域至少含有 A 的一个点，就说 x 是 A 的**接触点**．

如果 x 的每个邻域至少含有 A 的一个异于 x 的点，就说 x 是 A 的**聚点**．

换句话讲，x 是 A 的接触点相当于 $x\in A$ 或者 x 是 A 的聚点．

容易验明，若 x 是 A 的聚点，则 x 的每个邻域含有 A 的无限多个点．

A 的一个点若非 A 的聚点，就叫做 A 的**孤立点**．

例子 1）整数集合 Z 没有聚点．

2）点 $\frac{1}{n}(n\in Z^*)$[注] 所成的集合 A 有唯一的聚点 O．A 的每一点都是孤立点．

3）有理数集没有孤立点．R 的每一点都是 Q 的聚点．

附贴包，闭包

A 的接触点的集合称为 A 的**附贴包**．

包含 A 的所有闭集的交集称为 A 的**闭包**，亦即包含 A 的最小闭集．

容易验明，这两个集合是相同的，都用 $\overline{A}$ 表示，并且相应的名称不加区别．

A 是闭集相当于 $A=\overline{A}$．

［注］ Z^* 表示非零整数的集合。——译者注

有上界闭集的上确界

从 R 的定义推知，R 的子集 A 若有上界，就有上确界 a，用 $\sup A$ 表示。

$a=\sup A$ 的特性是：$(a, +\infty)$ 不含 A 的点，并且 a 的每个邻域至少含有 A 的一个点。特别，a 是 A 的接触点，所以要么 $a\in A$，要么 a 是 A 的聚点。

当 A 是闭集时，$A=\overline{A}$，故 $a\in A$；换句话讲，每个有上界的闭集含有它的上确界。

5. 有界闭区间的紧致性

有界闭区间的一个最重要属性，就是下面的波莱尔-勒贝格定理表达的性质，它使我们可以把研究任意开覆盖的问题化为研究它的有限子开覆盖的问题，从而由局部性质得出整体性质。

定理 3（波莱尔-勒贝格定理） 设 $(w_i)_{i\in I}$ 是有界闭区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖，即是 R 的一族开集，它们的并集包含 $[a, b]$，则存在一有限子覆盖 $(w_i)_{i\in J}$，它们的并集同样包含 $[a, b]$。

为证明起见，我们用 A 表示 $[a, b]$ 中使得 $[a, x]$ 能被有限多个 w_i 所覆盖的那些 x 所成的集合；容易证明 A 含有它的上确界，并且这上确界只能是 b。而关系 $b\in A$ 相当于定理的结论。

定理 4（波尔查诺-外尔斯特拉斯定理） 有界闭区间 $[a, b]$ 的任何无限子集 X 在 $[a, b]$ 上至少有一聚点。

这是前面定理的直接推论：

若 $[a, b]$ 的任何一点 x 都不是 X 的聚点，则每个 x 都具

有一个开邻域 $V(x)$，至多含有 X 的一个点，即 x 自身．这些 $V(x)$ 构成 $[a, b]$ 的开覆盖；根据定理 3，存在有限多个这样的 $V(x)$，比如 $V(x_p)$ $(p=1, 2, \cdots, n)$ 组成 $[a, b]$ 的一个覆盖，所以 X 至多含有 n 个点 x_p．

从上面两个定理出发，容易证明把 $[a, b]$ 换成它的任意闭子集而得的相应定理．

6. 连续函数，序列的极限

含糊地讲，函数 f 在一点 x_0 处连续，是指 x 与 x_0 充分接近时，$f(x)$ 与 $f(x_0)$ 就接近．因此，可以期望，邻域的概念将对连续概念给出一个方便的定义．

下面我们只考虑定义在 R 的一子集 X 上并在 R 中取值的函数，亦即 X 上的数值函数．

定义 7 设 f 是把 R 的子集 X 映入 R 的映射，$x_0 \in X$，如果对于 $f(x_0)$ 的每个邻域 W，存在 x_0 的一个邻域 V，使得

$$(x \in V \cap X) \Rightarrow (f(x) \in W),$$

则称 f 在 x_0 连续．

如果我们规定：x_0 关于 X 的邻域是指 X 中任何形如 $(V \cap X)$ 的子集，V 是 x_0 在 R 中的邻域，那么，上述连续性定义中的条件相当于：对每个 W，集合 $f^{-1}(W)$ 是 x_0 关于 X 的邻域．

为简单计，现在假设 $X=R$，即设 f 是把 R 映入 R 的映射．

若 f 在每一点连续，则对 R 的每个开集 w，根据刚才的解释，集合 $f^{-1}(w)$ 是其中每一点的邻域，所以是开集．反之，若对任意的开集 w，集合 $f^{-1}(w)$ 都是开集，则 f 在每一点连

续. 这是连续函数的一个简要特性.

例如用上述特性, 可立即证明: 若 f 与 g 是把 R 映入 R 的两个连续映射, 则它们的复合 $f\circ g=f(g)$ 也连续(连续的传递性).

下面是一个等价特性:

把 R 映入 R 的映射 f 是连续的, 如果对 R 的每个闭集 F, $f^{-1}(F)$ 是闭集.

利用下列公式立即得到证明:

$$f^{-1}(CA)=C(f^{-1}(A)).$$

序列的极限

定义 8 设有 R 的点序列 (x_n) 和 R 的一点 l. 如果对 l 的每个邻域 V, 除了有限个 n 的值外, 均有 $x_n\in V$, 就说序列 (x_n) 收敛于 l, 或者说以 l 为极限.

若令 $X_n=\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, 则上述条件化为: 至少有一个 n 使得 $X_n\subset V$.

由公理 V_5, 容易证明: 一个序列至多只能有一个极限.

容易证明下列结论:

1) 任何有上界的增序列(以及有下界的降序列)都有极限.

2) 设 f 是把 X 映入 R 的映射, 在 X 的一点 a 处连续, 则对 X 中任何收敛于 a 的序列 (x_n), 序列 $(f(x_n))$ 收敛于 $f(a)$.

序列的接触点

实数序列 $a_n=\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$ 不收敛; 但 ±1 往往可视为广义的极限. 对这个概念的分析就产生下列定义:

定义 9 设 (a_n) $(n=1, 2, \cdots)$ 是 R 的点列, a 是 R 的一

点. 如果对 a 的每个邻域 V, 都存在任意大的足标 n, 使得 $a_n \in V$, 就说 a 是序列 (a_n) 的接触点.

若用 A_n 表示集合 $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$, 则当 a 属于每个 A_n 的附贴包时, a 就是序列 (a_n) 的接触点.

因此, 序列的接触点的集合是 $A = \bigcap_1^\infty \overline{A}_n$.

这个集合是闭的; 它可能是空的, 例如 $a_n = n$. 然而, 使用有界闭区间的紧致性, 容易证明, 每一有界序列至少有一接触点.

当序列 (a_n) 收敛于 l 时, 则它有唯一的接触点 l. 但反之不真; 例如, 序列

$$\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \cdots, \frac{1}{n}, n, \cdots\right)$$

有唯一的接触点 O, 可是这序列并不收敛于 O. 不过, 容易证明, 若有界序列有唯一接触点 a, 则此序列收敛于 a; 这本质上是由于有界闭区间的紧致性.

R 的可数基及其应用

迄今所论拓扑性质只用到 R 的序结构, 这些性质对于任何全序集也成立, 只要其中任何有上界的子集都有上确界.

R 含有处处稠密的可数子集(即 Q). 利用这一事实, 我们可以得到与可数性有关的一些新性质. 下面举出几个. 它们的证明都是容易的:

1) R 中有可数多个开集 (W_n), 使得 R 的每个开集都是其中某些开集的并集(例如, 可以取区间 (a, b) 作为开集 W_n, $a, b \in Q$). 这样的一族开集 (W_n) 称为 R 的可数基.

2) R 的子集 X 的任何开覆盖都有一个有限或可数的子覆盖.

特别，两两互不相交的一族开集是有限的或可数的；由此可知，R 的每个开集 w 都是至多可数个两两互不相交的开区间的并集．这些开区间是 w 上的下述等价关系的等价类：$x \sim y \Leftrightarrow [x, y] \subset w$．

3）若 a 是X的一个聚点，则 a 是X中由相异点组成的一个序列的极限．

4）若 a 是序列(x_n)的接触点，则存在(x_n)的一子序列收敛于 a．

5）设 f 是把 R 的子集 X 映入 R 的映射，$a \in X$．要使 f 在点 a 连续，充要条件是：对于 X 中收敛于 a 的任何序列(x_n)，序列 $f(x_n)$ 收敛于 $f(a)$．

上述命题补足了研究序列极限时提出的一个命题．

从上述第一个性质容易推出其余性质．

7．R 的一致结构

迄今我们还不曾用到 R 的代数结构．我们将看到，R 的加群结构可以确立一些新的性质；事实上，R 上存在平移使我们可以谈集合的微小级．

对于每个 $X \subset R$，$a \in R$，用 $X+a$ 表示元素$(x+a)$的集合，这里 $x \in X$，并称 $X+a$ 是 X 经过平移 a 后的集合．

于是可以给出下面定义：设有 O 的邻域 V 与 R 的子集 X，如果可以把 X 平移到 V 中，就说 X 的微小级是 V．

这个定义容易推广至具有适当拓扑结构的群．不过，利用 R 是全序群这一事实，还可将上述定义精确陈述如下：

对每个 $x \in R$ 令 $|x| = \sup\{x, -x\}$，易证 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$；再令 $d(x, y) = (x, y)$的距离 $= |x-y|$，易证：

1) 若 $x \neq y$，则 $d(x, y) > 0$; $d(x, x) = 0$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$.

3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$（三角形不等式）.

在研究直线的一致结构时，这三个性质是基本的，经常要用到.

集合的直径

对于每个 $X \subset R$，设 X' 是数 $|x-y|$ 的集合，这里 $x, y \in X$. 若 X' 有上界，我们令 $\delta(X) = \sup X'$，否则令 $\delta(X) = +\infty$. $\delta(X)$ 称为 X 的直径. 显然 $\delta(X) = \delta(\overline{X})$.

定义 10 设 $\varepsilon > 0$. 如果 $\delta(X) \leqslant \varepsilon$，就说集合 X 的微小级是 ε.

若集合 X 与 Y 的微小级都是 ε 且 $X \cap Y \neq \varnothing$，则集合 $X \cup Y$ 的微小级是 2ε.

柯西序列

设 (a_n) 是收敛序列；若令 $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$，则 $\delta(A_n) \to 0$.

我们说，序列 (a_n) 是柯西序列，如果 $\delta(A_n) \to 0$（就是说当 $p, q \to \infty$ 时，$|a_p - a_q| \to 0$）.

我们刚才已经指出，每一收敛序列都是柯西序列. 逆命题则是直线的一个基本性质：

定理 5 R 的每一柯西序列都是收敛的.

因柯西序列有界，故至少有一接触点，又柯西序列至多只有一个接触点，故定理成立.

更经典的证明是归结为单调序列的情形.

一致连续

这个概念不能从纯拓扑的概念，即从开集或邻域出发予以定义. 还要基于 R 的群结构或者距离的概念；我们要对一

致连续的概念给出两个等价的定义来澄清这点:

定义 11 设 f 是把 R 的子集 X 映入 R 的映射，我们说，f 是一致连续的，如果对 O 的每个邻域 W，存在 O 的邻域 V，使得对于微小级为 V 的任何 $A\subset X$，像 $f(A)$ 的微小级是 W.

定义 11′ 记号同上. f 称为一致连续，如果 $\delta(A)\to 0$ 蕴涵 $\delta(f(A))\to 0$. (换言之，对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得 $(\delta(A)<\eta)\Rightarrow(\delta(f(A))<\varepsilon)$.)

显然，每个一致连续函数是连续的; 反之不真.

然而，有一个基本定理说: 当 X 是有界闭集时，把 X 映入 R 的任何连续映射都是一致连续的. 这个结论容易从定理 3，定理 4 或者它们在有界闭集上的推广推得.

函数序列的一致收敛

这是有关值域空间的概念，对于定义空间的拓扑结构和一致结构未做任何假设. 准确讲，我们有:

定义 12 设 E 是完全任意的集合，(f_n) 是把 E 映入 R 的一映射序列，f 是把 E 映入 R 的映射. 我们说，序列 (f_n) 一致收敛于 f，如果对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个整数 $n(\varepsilon)$，使得对每个 $x\in E$ 与每个 $n\geqslant n(\varepsilon)$，我们有:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad 即 \quad d[f_n(x), f(x)]<\varepsilon.$$

在稍后的一讲中，还要更详细地研究这个概念. 这里简单提醒一下，一致收敛的概念比逐点收敛要求更强些. 例如，设 f_n 是定义在 $[0, 1]$ 上的数值函数:

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x(1-nx), & 当\ x\in\left[0,\ \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & 当\ x\in\left[\dfrac{1}{n},\ 1\right]. \end{cases}$$

这个函数序列逐点收敛于函数 $f\equiv 0$. 但不一致收敛，因为

$$\max|f_n(x)-f(x)|=\frac{n}{4},$$

当 $n\to\infty$ 时根本不趋于 0.

8. R 上的拓扑体的结构

R 的加法与乘法和它的拓扑结构与一致结构是相容的. 现在来说明相容的意义.

定理 6 下列映射连续:

把 R 映入 R 的映射 $x\to ax$; 把 R^2 映入 R 的映射 $(x, y)\to x+y$;

把 R^* 映入 R 的映射 $x\to\frac{1}{x}$; 把 R^2 映入 R 的映射 $(x, y)\to xy$.

下列映射一致连续:

把 R 映入 R 的映射 $x\to ax$; 把 R^2 映入 R 的映射 $(x, y)\to x+y$.

自然，对于把 R^2 映入 R 的映射必须给出连续性与一致连续性的定义. 例如，取 R^2 中两点的欧氏距离作为距离便可得到 R^2 中一致连续的概念.

注意，映射 $x\to\frac{1}{x}$ 与 $(x, y)\to xy$ 非一致连续.

利用连续与一致连续的传递性，从上面定理推出另一些熟知的结果.

例如，若 f 与 g 是两个连续(或一致连续)的数值函数，则 $f+g$ 亦然.

我们可以对定理 6 补充一个与 R 的全序群结构有关的

结果：

映射 $x \to |x|$ 是把 R 映入 R 的一致连续映射.

于是，从公式

$$\sup(x, y) = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

知，把 R^2 映入 R 的映射 $(x, y) \to \sup(x, y)$ 一致连续.

同样，若 f 与 g 是两个数值连续（一致连续）函数，则 $|f|$ 与 $\sup(f, g)$ 亦然.

把群 R 映入群 R 的连续表示

设 f 是把 R 映入 R 的连续映射，满足

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

由此立得：对每个分数 $\frac{p}{q}$，

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} f(1).$$

因此，f 在 Q 上的限制就是 $x \to ax$.

把 R 映入 R 的这两个映射 f 与 $x \to ax$ 都连续，并且在处处稠密的集合 Q 上相同；所以（利用一个容易证明的但又重要的性质）它们是恒同的.

因此，把 R 映入 R 的每个连续表示（对于加法）是单调的并且具有形式 $x \to ax$.

设 g 是把 R_+^* 映入 R_+^* 的映射并满足 $g(xy) = g(x)g(y)$，利用 R 与乘法群 R_+^* 之间的同构映射，立即得到关于 g 的类似结果.

R 的子群

本文最后讲一个简单而常用的结果：

定理 7 R 的任何加法子群要么是处处稠密的，要么具有形式 aZ（点 an，$n \in Z$ 的集合）.

由此推知，R 的任何闭的加法子群要么等同于 R，要么是群 aZ.

看一个应用：设 f 是 R 上的数值函数；如果对每个 x，有 $f(x+a)=f(x)$，就说 a 是 f 的一个周期.

f 的周期所成的集合 P 显然是 R 的加法子群. 当 f 连续时，P 是闭集.

因此，要么有 $P=R$，这蕴涵 $f=$常数，要么 P 具有形状 aZ，恒可假设 $a\geqslant 0$，并称这个数 a 是 f 的最小周期.

第二讲　欧氏空间与尺度空间．尺度概念与拓扑概念

A. Revuz　(普瓦蒂埃理学院教授)

1. 数直线复习

在前一讲演中，G. Choquet 提到了实数直线 R 的代数性质，并且立足于 R 的序结构定义了把 R 映入 R 的连续映射．区间 (a, b) 是满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合，把 R 映入 R 的映射 f 在 x_0 连续是指：对于任何含有 $f(x_0)$ 的区间 (α, β)，存在一个含有 x_0 的区间 (a, b) 使得 $x\in(a, b)$ 蕴涵 $f(x)\in(\alpha, \beta)$．也可用逆映射 f^{-1} 来定义（A 是 R 的子集，$f^{-1}(A)=\{x\in R | f(x)\in A\}$）．如果对每个含有 $f(x_0)$ 的区间 (α, β)，$f^{-1}(\alpha, \beta)$ 包含一个含有 x_0 的区间，就说 f 在 x_0 连续．如果用开集表示任意多个开区间的并集，那么可以指出：把 R 映入 R 的映射在每一点处连续的充要条件是：每个开集的逆像仍是开集（空集视为开集）．

我们的首要目标，是要利用数直线 R 的另一结构来定义把 R 映入 R 的映射 f 的连续性：用两个实数之差的绝对值表示这两个实数的距离，可以对 f 在点 x_0 处的连续性给出三个等价的定义如下：

1° 对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得 $|x-x_0|<\eta$ 蕴涵 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$．

2° 当 x 到 x_0 的距离趋于 0 时，$f(x)$ 到 $f(x_0)$ 的距离也趋于 0，

3° 对每个以 $f(x_0)$ 为中心的区间 I, $f^{-1}(I)$ 包含一个以 x_0 为中心的区间.

由于 3° 以及含有一点的任何开区间必包含一个以此点为中心的开区间, 所以上述连续性定义 3° 与基于 R 的序结构的定义是等价的, 这里, R 的开集可以定义为: 开集是指一个集合 O, 使得 $x\in O$ 蕴涵 O 中含有一个以 x 为中心的开区间 I.

上述连续性定义 3° 的优点是适用于任何定义了距离的空间.

2. 距离的定义

E 是一个集合, 它的元素用 x, y, $\cdots$ 表示. E 上的距离是指把 $E\times E$ 映入 R^+(非负实数集)的一个映射 d 具有下列性质:

1° $d(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$.

2° $d(x, y)=d(y, x)$ (对称).

3° $d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)$, (三角形不等式).

具有这种距离的 E 叫做*尺度*(或*距离*)*空间*. 显然, 映射 $(x, y)\to|x-y|$ 就是 R 上的一个距离.

设 E 与 F 是两个尺度空间, 关于连续性的概念, 上面的定义 2° 可以原封不动地照搬. 与 1° 相当的定义是: 设 d 是 E 上的距离, δ 是 F 上的距离, 则对每个 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得 $d(x, x_0)<\eta\Rightarrow\delta[f(x), f(x_0)]<\varepsilon$. 与 3° 相当的定义要引入球的概念: 中心为 x_0、半径为 r(正数)的开球(闭球)是指满足 $d(x_0, x)<r(\leqslant r)$ 的点 x 的集合. 于是与 3° 相当的定义是: 中心为 $f(x_0)$ 的开球的逆像包含一个中心为 x_0 的开球.

在继续讨论从距离出发定义连续性之前, 就距离本身略

谈几句. 直线上，平面(R^2)中，三维空间(R^3)中那些“具体”的距离都满足距离的公理，所以就这些情形而言那几条公理似乎已经“合情合理”了. 不过考察一下其中每一条的意义，以及弄清楚在什么情况下缺少一条就会给距离的使用造成阻碍，是不无益处的.

第一个公理表明，每个元素到它自身的距离是零，到另一个元素的距离为正. 如果我们设想一种“距离”，满足 2° 与 3° 以及 $x=y\Rightarrow d(x, y)=0$(即不要求 $d(x, y)=0\Rightarrow x=y$)，并且的确存在若干对不同的元素，彼此距离均为零(这样的距离称为准距离). 那么会有什么情况呢？二者必居其一：要么是因为该距离选择不当，必须考虑别的距离；要么是由于彼此距离为零的元素尽管可以说是不同的，但却不应该区别对待，因为它们在所论述的问题中起同样的作用. 在后一情形，我们注意：1° 由 $d(x, y)=0$ 所定义的关系 $x\rho y$ 是一等价关系；2° 一个元素 x 到同一等价类的两个元素 y 与 z 的距离一样，这是因为 $d(z, y)=0$ 蕴涵

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)=d(x, y),$$

$$d(x, y)\leqslant d(x, z)+d(z, y)=d(x, z),$$

所以，两个模 ρ 等价类的距离可以定义为一个等价类中任一元素到另一个等价类中任一元素的距离. 商空间 E/ρ 是一尺度空间，是把 E 中彼此距离为零的元素看成一样而得. 平面上点的横坐标差的绝对值就是上述准距离的一个简单例子：等价类是直线 $x=$ 常数，空间 E/ρ 与数直线同构(见后).

第二个公理，即距离的对称性，尽管显得自然，但却不是随便一个具体的距离都能满足的，例如走山路按时间测行程所得的距离，上山距离就比下山距离大. 不过，碰到不对称的距离也不必大惊小怪，因为，若令

$$\delta(x, y)=\sup[d(x, y), d(y, x)],$$

那么 δ 就是满足三条公理的距离(只要 d 满足 1° 与 3°).

第三条公理的好处，直观地讲，就是保证了“邻域的邻域仍是邻域”. 另一些不等式也有同样的效果，例如，φ 是正的实函数，在点(0, 0)为零且连续，则形如

$$d(x, y)\leqslant\varphi(d(x, z), d(z, y))$$

的不等式至少保证了“很接近的很接近仍很接近”.

经典形式的三角形不等式有两条优点：

1° 简明.

2° 适用范围很大. 公立中学四年级为颁发微积分学考试合格证书而布置学习的所有空间都可以赋予尺度结构，这些结构确实有用，而不是为了考试硬塞进去的.

距离的例子[注]

注意，任何集合上都至少可以定义一个距离，就是令 $d(x, x)=0$; 若 $x\neq y$ 则 $d(x, y)=1$. (这就是土地丈量员用一把可以任意伸缩的米尺可能丈量出来的距离！)这显然是一个极端的例子，除了对尺度空间的某个命题提出可能的反例时能叫人一眼看穿以外，几乎不起什么作用.

在空间 R^n 中，对于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 我们可以定义一个距离 $d_1(x, y)=\sqrt{\sum_i(x_i-y_i)^2}$ (欧几里德距离).

公理 1° 与 2° 显然满足. 要证明三角形不等式，令

$$x_i-z_i=a_i,\ z_i-y_i=b_i, \text{则 } x_i-y_i=a_i+b_i.$$

[注] 除了数学上的例子以外，举一些日常生活中的距离，可能不无好处：电话谈话的单价，旅行的期限，旅行费用，……，这些例子我们虽然不习惯于称之为距离，但一般却具有所说的那些数学性质.

问题就是要验明

$$\sqrt{\sum(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum a_i^2}+\sqrt{\sum b_i^2},$$

此不等式等价于

$$\sum(a_i+b_i)^2\leqslant\sum a_i^2+\sum b_i^2+2\sqrt{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)},$$

即等价于 $$\sum a_ib_i\leqslant\sqrt{(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)}.$$

上面的不等式，当 $\sum a_ib_i\leqslant 0$ 时是成立的，当 $\sum a_ib_i>0$ 时，由下面的许瓦兹不等式推出：

$$(\sum a_ib_i)^2\leqslant(\sum a_i^2)(\sum b_i^2).$$

因三项式 $\sum(a_i+b_i\lambda)^2$ 大于或等于 0，故许瓦兹不等式成立。

注意，仅当 $\frac{a_i}{b_i}=-\lambda(i=1, 2, \cdots, n)$时，等号才成立，即仅当

$$\frac{x_1-z_1}{y_1-z_1}=\cdots=\frac{x_i-z_i}{y_i-z_i}=\cdots=\frac{x_n-z_n}{y_n-z_n},$$

亦即三点 x, y, z 共线时，等号才成立。

R^n 中另一个方便的距离是

$$d_2(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|.$$

还有第三个距离 $d_3(x, y)=\sum_i|x_i-y_i|$.

若将诸坐标视为笛卡儿直角坐标，则 d_1 确定的球体的边界，在 R^2 中是圆周，在 R^3 中是球面．（如果用斜坐标就是椭圆与椭球面）．在直角坐标下，d_2确定的球体的边界，在 R^2 中是各边平行于坐标轴的正方形（在 R^3 中是立方体），而 d_3 确定的球体的边界，在 R^2 中是各边平行于坐标角平分线的正方形（在 R^3 中是正八面体）．

若 d 是某个空间上的距离，f 是定义在 R^+ 上的正值实函数，$f(0)=0$，并且对每个 $x>0$, $y>0$ 有 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$．则 $f(d)$ 也是距离，它和 d 确定出同样一些球（一般说

来，每个球对于 d 与 $f(d)$ 有不同的半径）．特别，可取增凹函数作为 f．例如，若 d 是一距离，则 $\frac{d}{1+d}$ 也是一个距离，这是一个有界距离，和原来的距离确定同一些球．

进一步，如果同一空间上定义了若干距离 $d_1, d_2, \cdots, d_p$，容易验明

$$d=\sqrt{d_1^2+d_2^2+\cdots+d_p^2}$$

也是一个距离（许瓦兹不等式的推论），还有 $d=d_1+d_2+\cdots+d_p$ 及 $d=\sup\limits_i d_i$ 也都是距离．（在后一情形，由 d 确定的中心为 m、半径为 r 的球是各个 d_i 确定的同一中心、同一半径的 p 个球之交．

最后注意，若同一空间上定义了距离序列 (d_n)，那么，由此可以派生出一个新的距离：

$$d=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n}{1+d_n}.$$

测地距离

设有尺度空间 E 与 E 的子集 F，把 $E\times E$ 映入 R^+ 的映射（距离）d 在 $F\times F$ 上的限制显然是 F 上的距离，称为由 E 的距离导出的距离．例如，若 E 是 R^3，F 是球面 S 那么 R^3 的欧氏距离在 S 上导出一个距离（弦长），也称为把 S 嵌入 R^3 的距离．由此出发，还可定义另一个距离：测地距离．

给出 F 的两点 a 与 b，假设 F 中至少存在一条联结 a 与 b 的道路．所谓道路是指把区间[0, 1]映入 F 的一个连续映射 f 满足 $f(0)=a$, $f(1)=b$．对于任何有限序列 $\{t_i\}$: $t_0=0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_i\leqslant\cdots\leqslant t_n=1$，相应地得到点 $a, \cdots, m_i=f(t_i), \cdots, b$ 以及正实数 $L(\{t_i\})=d(a, m_1)+\cdots+d(m_i, m_{i+1})+\cdots+d(m_{n-1}, b)$．对于所有的有限序列 $\{t_i\}$，相应的数 L 的集

合，如果有上确界，就说道路是可求长的，$\sup L(\{t_i\})=L(f)$ 就是道路 f 的长。

现在验明 $\delta(a, b)=\inf L(f)$ (inf 是对所有联结 a, b 的连续道路来计算的)是一个距离。事实上：

1° $\delta(a, b)=0 \Leftrightarrow a=b$ 是显然的。因为若 $a=b$，则存在一条联结 a 与 b 的道路，长为零(对于每个 $t\in[0, 1]$，$f(t)=a$)，若 $a\neq b$ 则每条道路的长度至少等于 $d(a, b)>0$。

2° 对称性明显。

3° 给了 $\varepsilon>0$ 则存在道路 f_{ac} 与 f_{cb} 使得

$$L(f_{ac})<\delta(a, c)+\varepsilon, \quad L(f_{cb})<\delta(b, c)+\varepsilon.$$

可用明显的方法定义两条道路的和：相应的映射 φ 定义成：

$$\varphi(t)=\begin{cases} f_{ac}(2t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ f_{cb}(2t-1), & \text{当 } \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

和的长是长的和。因为 φ 是联结 a 与 b 的一条道路，故有

$$\begin{aligned}\delta(a, b)&\leqslant L(\varphi)=L(f_{ac})+L(f_{cb})\\ &<\delta(a, c)+\delta(b, c)+2\varepsilon.\end{aligned}$$

因 ε 任意，由此推得三角形不等式。这就是从 R^3 的欧氏距离出发在球面 S 上定义的测地距离。利用上面的定义，可以初等地证明，测地距离是联结两点的两段大圆弧中最小一个的长。

3. 同 尺 映 射

把尺度空间 E(距离为 d) 映成尺度空间 F(距离为 δ) 的

一一映射 f 叫做同尺映射，如果对于 E 的每一对元素 (a, b) 有

$$d(a, b)=\delta(f(a), f(b)).$$

初等几何中所谓的位移变换和对称变换都是同尺映射，原来的名称是不恰当的（最好是叫做正同尺映射或反同尺映射）[注].

显然，若 E' 是 E 的子空间，则 f 在 E' 上的限制是把 E' 映成 $f(E')$ 的同尺映射. 但是，E 与 F 的两个子空间之间的同尺映射可以扩张成整个空间上的映射，这个断言并不总是对的，因而是某些定理要讨论的目的.

例如，若 $E=F=R^2$，由不共线三点组成的两个子集之间的同尺映射可以唯一地扩张至整个空间. 这是三角形三边等则全等这个命题的升华形式. 若 E 与 F 是具有同样半径的两个球面，上述结论也真，这里距离是嵌入距离或相应的测地距离. 就用这些距离，对于半径不同的两个球面，这个结论就不对.（这些例子表明，通常那些全等情形的证明"含有多少未曾表达出来的公理"啊！）

4. 连 续 性

现在再来讨论把尺度空间 E 映入尺度空间 F 的连续映射 f 的第三个定义：f 在一点 x_0 连续，意指每个中心为 $f(x_0)$ 的开球的逆像都包含一个中心为 x_0 的开球. 这导致引入下列概念：

[注] 此外，看来正是利用了距离和同尺映射这些概念，才能最容易地给出初等几何的某种简单而"具体"的公理体系，即是说这些公理表达了几何中通常的运算（测量距离、弯曲，等等）.

定义 任何集合，如果包含以 x 为中心的一个开球，就称为点 x 的邻域.

于是可以说："f 在点 x_0 连续的充要条件是：$f(x_0)$ 的每个邻域的逆像是 x_0 的一个邻域"，这一简单而普通的陈述有一个好处，就是保持连续概念的直观含义

假设 f 在 E 的每一点连续，利用 E 和 F 的开集可以把连续的概念表达得更简单.

定义 尺度空间中的开集是任意多个开球的并集.

注意，若 $y\in B(x, r)$，则 $d(x, y)=r'<r$，所以根据三角形不等式有 $B(y, r-r')\subset B(x, r)$，由此得到开集的另一定义：开集是其中每一点的邻域. 由此推出："f 是把 E 映入 F 的连续映射（即在 E 的每一点连续）的充要条件是：F 的每个开集的逆像是 E 的开集".

用连续性的上述定义容易证明下面定理：若 E、F、G 是三个尺度空间，f 是把 E 映入 F 的连续映射，g 是把 F 映入 G 的连续映射，则把 E 映入 G 的复合映射 $g\circ f$ 仍连续.

若 $A\subset F$，CA 是 A 的补集，则

$$f^{-1}(CA)=Cf^{-1}(A),$$

因此，如果闭集是指其补集是开集的集合，那么，在上面连续性定义中，把开字换成闭字，便得到一个等价的定义.

利用集合的接触点的概念，可以得到闭集的一个内在定义.

定义 如果对于点 a 的每个邻域 V，我们有 $V\cap A\neq\varnothing$，a 就是 A 的接触点.（显然只需中心为 a 的开球是这样就行了.）集合 A 的附贴包 $\overline{A}$ 是 A 的所有接触点的集合. 对于任何 A，有 $A\subset\overline{A}$.

定理 一个集合是闭集的充要条件是：这个集合等于它

的闭包.

事实上, A 是闭集等于说 CA 是开集. 若 $a \notin A$, 则存在一球 $B(a, r)$ 含于 CA, 故 $B(a, r) \cap A = \varnothing$, $a \notin \overline{A}$, 由此 $\overline{A} \subset A$, 即 $\overline{A} = A$. 反之, 若 $A = \overline{A}$, 则对每点 $a \notin A$, 存在一个球 $B(a, r)$, 使得 $B(a, r) \cap A = \varnothing$, 由此 $B(a, r) \subset CA$, 故 CA 是开集.

容易验明闭球是闭集(这就保证了用语的呼应).

开集有两个很重要的性质:

(O_1): 任意多个开集的并集是开集, 这是定义的直接推论.

(O_2): 任意有限个开集的交集是开集. (空集算作开集.)事实上, 设 $O_1, O_2, \cdots, O_n$ 是 n 个开集, 其交集非空, $a \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$. 则对 $i=1, 2, \cdots, n$ 存在一个球 $B(a, r_i)$ 含于 O_i. 故 $B(a, \inf_i r_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$, 明所欲证.

闭集是开集的补集, 因此有对偶性质(读者也可使用闭集的定义 $A = \overline{A}$ 给以直接的证明):

(F_1): 任意多个闭集的交集是闭集.

(F_2): 任意有限个闭集的并集是闭集.

5. 拓 扑 概 念

设有两个集合 E 与 F, E 的距离 d(F 的距离 δ)使 E(F)成为尺度空间 $E_d(F_\delta)$. $C(E_d, F_\delta)$ 表示把 E_d 映入 F_δ 的所有连续映射的集合. (这是把 E 映入 F 的所有映射所成集合的子集). 这里可以提一个重要问题: d 或 δ 的改变或两者同时改变, 能否不引起 $C(E_d, F_\delta)$ 的改变? 下面回答一个

相近的问题:

设 d_1 是 E 上的已知距离，E 上应该引进什么样的距离 d_2，才能对任何尺度空间 F_δ 有

$$C(E_{d_2}, F_\delta)=C(E_{d_1}, F_\delta).$$

显然，只需与 d_1 相应的开集族 O_1 恒等于与 d_2 相应的开集族 O_2 即可. 这条件还是必须的. 因为如果有一集合属于 O_1 而不属于 O_2 那么只要取 $F_\delta=E_{d_1}$，就会发现把 E 映入自身的恒等映射属于 $C(E_{d_1}, E_{d_1})$ 但不属于 $C(E_{d_2}, E_{d_1})$.

d_1 与 d_2 确定同一开集族的条件与下列条件等价: 对于每一 $a\in E$，关于 d_1 的每个球 $B_1(a, r)$ 包含一个关于 d_2 的球 $B_2(a, r')$，反之亦然.

据此，可以验明，前面在 R^n 中定义的三个距离 d_1, d_2, d_3 确定出同样的开集族，所以对于每个尺度空间 F_δ，这三个距离确定出同一集合 $C(R^n, F_\delta)$.

因此，尽管给了 E 的尺度结构就能确定集合 $C(E, F)$. 但是给了这个集合，甚至对任何 F 给了相应的集合，也并不能毫不含糊地确定 E 的尺度结构.

我们虽然用距离来定义了连续，但归根结蒂，连续性与距离本身无关，只与由距离确定的开集族有关.

因此，如果我们只关心定义在空间 E 上的映射的连续性，那么精确说明空间的尺度结构就不是很必要的了. 正因为如此，我们才来定义更一般的结构: 拓扑结构.

给了一集合 E，我们说，E 上定义了一个拓扑结构 $\mathfrak{T}$，如果存在 E 的一族子集 O，满足下面的两条公理:

(O_1): O 中任意多个集合的并集仍是 O 中的集合.

(O_2): O 中任意有限个集合的交集仍是 O 中的集合.

(关于 O 的空交与空并的约定[注]蕴含 E 及 E 的空子集属于 O).

O 中的子集合称为 E 关于拓扑结构 $\mathfrak{T}$ 的开集, E 叫做拓扑空间.

若 E 与 F 是两个拓扑空间, 把 E 映入 F 的映射 f 连续, 如果 F 的每个开集的逆像是 E 的开集.

前面给出的所有定义立即平移过来: 开集的补集称为闭集, 所以闭集族 $\mathfrak{F}$ 满足公理(F_1)与(F_2); 拓扑结构 $\mathfrak{T}$ 显然可以用 E 中满足这两条公理的子集族 $\mathfrak{F}$ 来定义.

同样, 一个点的邻域是一个集合, 它包含一个含有这点的开集; 集 A 的接触点是指它的任何邻域 V 都满足 $V\cap A\neq\varnothing$; 集合 A 的闭包 $\overline{A}$ 是 A 的所有接触点的集合. 可证闭集是满足 $A=\overline{A}$ 的集合.

两个拓扑空间 E 与 F 之间的一一且双方连续的映射称为同胚.

这些定义一旦确认, 就可以提出许多问题, 例如:

集合 E 上给出的拓扑结构能否由 E 上的一个尺度结构产生?

上面定义的那些拓扑结构的一般性质应该加以什么样的限制, 才能使之具有某种特殊的性质, 例如 R^n 的性质?

拓扑学作为一门理论, 其任务就是回答这类问题.

[注] 约定: 空交为全空间 E, 空并为 E 的空子集. ——译者注

第三讲　与尺度空间结构有关的概念

G. Choquet （索尔本大学教授）

M. Revuz 在其尺度空间的讲演中，定义了尺度空间的拓扑结构，以及把一个尺度空间映入另一个尺度空间的映射的连续性.

我在前面讲数直线的时候指出，除连续性外，还有一致连续. 我们将看到，在任意的尺度空间中，这个概念仍有意义. 更一般，我们将研究尺度空间中集合的微小级及其若干推论.

尺度空间是具有距离 $d(x, y)$ 的集合 E，这距离是把 E^2 映入 R_+ 的映射，满足：

1) 若 $x \neq y$，则 $d(x, y) > 0$；若 $x = y$，则 $d(x, y) = 0$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$.

3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

定义 1　A 是尺度空间的子集，当 $x, y \in A$ 时，距离 $d(x, y)$ 所成集合的上确界 $\delta(A)$ 称为 A 的直径.

这个数 $\geqslant 0$ 有限或无限.

例如，平面圆盘的直径就是普通意义下直径的长；等边三角形的直径是其边长；直线上区间 (a, b) 的直径是 $(b-a)$.

我们恒有 $\delta(A) = \delta(\overline{A})$[注]；仅当 A 是空集或一点集时，才

[注]　$\overline{A}$ 表示 A 的闭包.

有 $\delta(A)=0$.

当 A 的直径有限时，就说 A 有界.

1. 一 致 连 续

设 f 是把尺度空间 E 映入尺度空间 F 的映射. 利用距离，f 在 E 中的连续性可表达如下：

$$\forall \varepsilon>0,\ \forall x\in E,\ \exists \eta>0$$

使得 $(d(x, y)<\eta)$ 蕴涵 $(d(f(x), f(y))<\varepsilon)$.

数 η 与 ε 及 x 有关；如果存在这样的 η，它与 x 无关，就说 f 一致连续，或者更简洁地说：

定义 2 如果对于每个 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得对每个 $A\subset E$，条件 $\delta(A)<\eta$ 蕴涵 $\delta(f(A))<\varepsilon$，就说 f 一致连续.

如果把直径 $\delta(f(A))$ 称为 f 在 A 上的振幅，那么，f 的一致连续还可说成：当 A 的直径小时，f 在 A 上的振幅也小. 利用连续模的概念，可以把这一说法表达精确：设 φ 是定义在 $[0, \infty)$ 的数值增函数；如果对所有的 $x, y\in E$，有

$$d(f(x), f(y))\leqslant\varphi(d(x, y)),$$

就说 f 以 φ 作为连续模.

可以验证：f 的一致连续性等价于存在连续模 φ，使得当 $u\to 0$ 时，$\varphi(u)\to 0$.

最常用的连续模是线性函数 $\varphi(u)=ku$；当 f 有这样的连续模时，就说 f 是比值为 k 的李普希兹映射. 于是上面的条件成为：

$$d(f(x), f(y))\leqslant kd(x, y).$$

例子 1) 若 f 是 R 上的可微函数，导数 f' 满足 $|f'|\leqslant k$，则 f 是比值为 k 的李普希兹函数(用有限增量定理证明).

2) A 是 E 的子集，$x\in E$；数 $d(x, A)=\inf\limits_{y\in A} d(x, y)$ 称为 x 到 A 的距离.

把 E 映入 R 的映射 $x\to d(x, A)$ 是比值为 1 的李普希兹映射.

把 R 映入 R 的映射 $x\to|x|$ 是一个特例.

把 R^2 映入 R 的映射 $(x, y)\to x+y$ 是李普希兹映射. 而映射 $(x, y)\to xy$ 则不是；相反，如果规定 x 或 y 属于 R 中一个有界子集，这个映射则是李普希兹映射.

易见，函数 f 的一致连续蕴涵 f 在每一点连续，其逆不真；例如，函数 $x\to x^2$ 连续，但是关系

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

表明，条件 $|x-y|<\eta$ 并不蕴涵 $|x^2-y^2|$ 有上界.

下面的性质留作练习，根据这性质可以作出若干类似例子：

设 f 是一致连续的数值函数，定义在 $E=R^n$ 上，或者更一般，定义在 R^n 的一个凸集 E 上. 则存在两个常数 a 与 $b\geqslant 0$，使得对每个 $x\in E$ 有 $|f(x)|\leqslant a\|x\|+b$，这里 $\|x\|$ 表示 0 到 x 的距离.

一致连续函数的复合

1) 两个一致连续函数的复合 $g\circ f$ 仍一致连续.

2) 若 f 与 g 分别是比值为 k_1 和 k_2 的李普希兹函数，则 $g\circ f$ 是比值为 k_1k_2 的李普希兹函数.

应用：设 f 是定义在 E 中的数值函数；若 f 一致连续（或者说比值为 k 的李普希兹函数），则 $|f|$ 亦然. 据此，容易证明，若 f 与 g 是一致连续（或李普希兹函数），则 $(f+g)$，$\sup(f, g)$，$\inf(f, g)$ 亦然；只要 f 或 g 有一个还在 E 中有

界，fg 亦然.

两个尺度空间的同构

我们知道，空间的拓扑结构完全由其开集确定，从开集概念出发可以得到两个空间 E 与 F 的一种同构概念. 把 E 映成 F 的一一映射 f 称为拓扑同构（更经常称为同胚），如果 f 使 E 与 F 的开集互相映成，或者说如果 f 与 f^{-1} 连续.

同样，从尺度空间上一致连续的概念出发也可以得到一种同构的概念：

定义 3 把尺度空间 E 映成另一尺度空间 F 的一一映射 f 称为一致同构，如果 f 与 f^{-1} 一致连续.

拓扑同构不必是一致同构；例如，把 R 映成 R 的映射 $x\to x^3$ 是同胚，但不是一致同构.

因此，在同一个集合 E 上的两个距离 d_1 与 d_2 可以确定同样的拓扑结构，但不必确定同样的"一致结构". 要使 d_1 与 d_2 在 E 上定义同样的一致结构，充要条件是：当 $d_1(x, y)$ 很小时，$d_2(x, y)$ 也很小；$d_2(x, y)$ 很小时，$d_1(x, y)$ 也很小. 例如，若 d 是 E 上的距离，对于一致结构，这个距离等价于距离 $\frac{d}{1+d}$ 与 $d^\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$；在 R^2 内，常常使用下列范数决定的距离：

$$\|x\|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2} \quad \text{或} \quad |x_1|+|x_2|$$
$$\text{或} \quad \sup(|x_1|, |x_2|),$$

（这里 x_1 与 x_2 是 x 的坐标）这些不同的距离彼此等价.

正如把 E 映入 F 的映射 f 的连续性只依赖于 E, F 的拓扑结构一样，f 的一致连续性也只依赖于 E, F 的一致结构.

定义在紧致空间上的连续映射

我们知道，有些连续函数并不一致连续，例如，把 R 映入 R 的映射 $x \to x^2$，这个例中，空间 E 与 F 不是有界的；但是 E 与 F 有界时，也存在类似的例子，例如，把 $(0, 1)$ 映入 $[-1, +1]$ 的映射 $x \to \sin \frac{1}{x}$ 连续但不一致连续.

反之，当 E 紧致时，就不存在类似的反例．这就是下面的基本定理：

定理 1 把紧致尺度空间 E 映入任一尺度空间的连续映射都是一致连续的.

证明见关于紧致空间的讲演.

2. 柯西序列，完备空间和逐次逼近法

尺度空间中点列收敛的概念涉及点列的极限点．然而，要知道一个序列是否收敛却不一定要求出它的极限，这一点往往是很有用的．正是柯西首先对于实数序列得出一个不依赖于极限值的收敛准则.

定义 4 设 E 是尺度空间，E 的点列 (x_n) 称为柯西序列，如果 $p, q \to \infty$ 时，$d(x_p, x_q) \to 0$，换言之，如果对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一整数 n_0，使得关系 $p, q \geqslant n_0$ 蕴涵 $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

这条件还可理解如下：用 X_n 表示集合 $\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$，如果 $n \to \infty$ 时，$\delta(X_n) \to 0$，则 (x_n) 是柯西序列.

显然，每一收敛序列都是柯西序列；一般说来，反之不真，例如，序列 $\{1, 1.4, 1.41, \cdots\}$ 由十进制分数构成，它收敛于 $\sqrt{2}$，在有理数集 Q 内是柯西序列，但在 Q 内它不收敛.

不过，确定一种尺度空间，使得柯西序列都收敛这一点是

很重要的．由此有下述定义：

定义 5 如果尺度空间 E 中任何柯西序列都收敛，就说 E 是完备的．

刚才已知有理数空间 Q 不完备；反之，R 则是完备的，这在前面关于数直线的一讲中已经说过了．

R 中柯西序列的例子：1）如果 (a_n) 下降于零，则交错级数 $a_1-a_2+a_3\cdots$ 的部分和 S_n 是柯西序列．

2）如果级数 $|b_1|+|b_2|+\cdots$ 收敛，则级数 $b_1+b_2+\cdots$ 的部分和 S_n 是柯西序列．

完备空间与非完备空间的例子：1）R 的每个闭区间完备；R 的每个开集（除 R 本身外）非完备．

2）欧氏空间 R^n 完备．事实上，R^n 的柯西序列在各坐标轴上的投影也是柯西序列，因为投影的结果使距离缩短了．因此，这几个投影序列都收敛．从而所给柯西序列收敛．

3）每一紧致尺度空间完备．

完备性是一致同构的不变性

把 R 映成 $(-1,\ +1)$ 的映射 $x\to\dfrac{x}{1+|x|}$ 是一同胚，但是，它把完备尺度空间 R 映成非完备的尺度空间 $(-1,\ +1)$，所以完备空间的概念不是一个拓扑概念．其所以如此，是因为同胚并不总是把柯西序列变成柯西序列．

反之，把 E 映入 F 的每个一致连续映射一定把 E 的柯西序列变成柯西序列，所以两个空间 E 与 F 之间的一致同构映射使它们的柯西序列互相变换，特别，E 与 F 如果有一个完备，则另一个也完备．

因此，尺度空间的完备性在一致同构映射下是不变的；这是一致结构的一个性质．

下面是几个有用的性质，它们的证明留作练习：

1） 在完备空间 E 中，直径趋于零的任何非空下降闭集序列(F_n)有非空交集，只有一个点组成，这点的每个邻域都包含序列中的一个集合。

2） 完备空间的每个闭子集是完备空间。

3） 尺度空间的每个完备子空间是该空间的闭集。

4） 在尺度空间中，两个完备子空间的并集与交集是完备子空间。

一致连续函数的开拓

分析学常常提出一个问题：把定义在集 E 中处处稠密子集 A 上的函数连续地开拓到整个 E 上（处处稠密是指 E 的每个开集都含有 A 的点）。这种开拓的可能性乃是下列定理的推论：

定理 2 设 E 是尺度空间，A 是 E 的处处稠密子集，f 是把 A 映入完备尺度空间 F 的一致连续映射。于是，f 可以唯一地开拓成把 E 映入 F 的连续映射。开拓后的映射仍然一致连续（并且与 f 有一样的连续模）。

下面是证明提要：

对每个 $x\in E$ 与每个整数 n，令 $B\left(x,\ \dfrac{1}{n}\right)$ 是 E 中以 x 为心、$\dfrac{1}{n}$ 为半径的闭球。诸集合 $V_n=\overline{f\left(A\cap B\left(x,\ \dfrac{1}{n}\right)\right)}$ 构成下降闭集序列，其直径趋于零（f 的一致连续性），所以存在唯一的公共点，记为 $g(x)$。

对于每个 $x\in A$，有 $g(x)=f(x)$。另一方面，对每个 $X\subset E$，$g(x)\subset\overline{g(A\cap X)}$ [注]，由此推出，$\delta(X)\to 0$ 时，$\delta(g(X))\to 0$。故 g 一致连续。

［注］ 这个包含式显然不成立，例如 $X=E-A$ 时，$g(E-A)\not\subset$

$\overline{g(A\cap(E-A))}=\overline{g(\phi)}$. 此外，本证明似乎没有这样简单，今据所给线索改证如下：

对于任何 $\varepsilon>0$，据 f 的一致连续性，存在 $\delta>0$，使得对任何 $a_1,a_2\in A$，$d_E(a_1,a_2)<\delta$ 蕴涵 $d_F(f(a_1),\ f(a_2))<\varepsilon/6$. 我们来证明：对任何 $X\subset E$，$\delta(X)<\delta/3$ 蕴涵 $\delta(g(x))<\varepsilon$. 设 $x_1,x_2\in X$，$d_E(x_1,x_2)<\delta/3$，按照 $g(x_1)$ 的定义（注意前面的练习 1)，存在 $n_1>3/\delta$，使得 $V_{n_1}\subset B(g(x_1),\varepsilon/6)$. 对于任何 $y\in B\left(x_1,\ \frac{1}{n_1}\right)$，当 m 充分大时，$B\left(y,\ \frac{1}{m}\right)\subset B\left(x_1,\ \frac{1}{n_1}\right)$，所以

$$g(y)=\bigcap_m\overline{f\left(A\cap B\left(y,\ \frac{1}{m}\right)\right)}\subset\overline{f\left(A\cap B\left(x_1,\ \frac{1}{n_1}\right)\right)}=V_{n_1}.$$

因此，

$$g\left(B\left(x_1,\ \frac{1}{n_1}\right)\right)\subset B(g(x_1),\ \varepsilon/6).$$

同理，存在 $n_2>3/\delta$，使得

$$g\left(B\left(x_2,\ \frac{1}{n_2}\right)\right)\subset B(g(x_2),\ \varepsilon/6).$$

由于 $A\cap B\left(x_i,\ \frac{1}{n_i}\right)\neq\phi\ (i=1,\ 2)$，取 $a_i\in A\cap B\left(x_i,\ \frac{1}{n_i}\right)$，于是

$$d_E(a_1,\ a_2)\leqslant d_E(a_1,\ x_1)+d_E(x_1,\ x_2)+d_E(x_2,\ a_2)<\delta,$$

从而

$$d_F(g(x_1),\ g(x_2))\leqslant d_F(g(x_1),\ f(a_1))+d_F(f(a_1),\ f(a_2))$$
$$+d_F(f(a_2),\ \ g(x_2))<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此得到 $\delta(g(x))<\varepsilon$. 最后，按照定义，$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)$，$a_n\in A\cap B\left(x,\ \frac{1}{n}\right)$，所以 $d_F(f(a_n),\ f(b_n))\leqslant\varphi(d_E(a_n,\ b_n))$ 蕴涵 $d_F(g(x),\ g(y))\leqslant\varphi(d_E(x,\ y))$，可见 g 和 f 有同样的连续模.

还应指出，上述证明中的记号 $B\left(x_1,\ \frac{1}{n_1}\right)$ 等均遵照原文规定指闭球，但换成开球后，全部论证包括原文对 $g(x)$ 的定义也都仍然有效。因此，原文规定 $B\left(x,\ \frac{1}{n}\right)$ 表示闭球似无必要. ——译者注

例子 1) 定义在有理数集 Q 上的 a^x 可以开拓至 R.

2) 设 f 是定义在[0, 1]上的可微数值函数，满足$|f'|<k$，于是 f 是李普希兹函数，所以一致连续. 因此可以开拓成定义在[0, 1]上的连续函数.

逐次逼近法

这里说的是在分析的许多领域(数值方程，微分方程，积分方程)中有广泛应用的一个有力的方法，它的长处先在 E. 比卡的工作中表现出来. 这方法可简要叙述如下:

首先，把尺度空间 E 映入另一个尺度空间 F 的映射 f 叫做 λ 压缩映射($0\leqslant\lambda<1$)，如果对 E 的任何两点 x_1, x_2，有

$$d_F(f(x_1), f(x_2))\leqslant\lambda d_E(x_1, x_2).$$

这其实就是比值为 $\lambda<1$ 的李普希兹映射.

例子 E 是欧氏空间 R^n，f 是比值为 $\lambda<1$ 的相似变换.

定理 3 设 E 是完备尺度空间，f 是把 E 映入自身的压缩映射. 则方程 $x=f(x)$ 有唯一解 a. 对于任何 $x_0\in E$，点 x_0 的逐次变换序列 $x_n=f^n(x_0)$ 收敛于 a.

证明 从关系 $x_{p+1}=f(x_p)$ 推出，对于每个 n，点对(x_{n-1}, x_n)变成点对(x_n, x_{n+1}).

因此 $d(x_n, x_{n+1})\leqslant\lambda d(x_{n-1}, x_n)$. 从头 n 个这样的关系得

$$d(x_n, x_{n+1})\leqslant\lambda^n d(x_0, x_1),$$

从而
$$d(x_n, x_{n+p})\leqslant d(x_0, x_1)\sum_n^\infty\lambda^p.$$

因 $0\leqslant\lambda<1$，故序列(x_n)是柯西序列.

若 a 是(x_n)的极限点，因 f 连续，故有

$$f(a)=\lim f(x_n);$$

另一方面，$x_{n+1}=f(x_n)$，取极限得 $a=f(a)$.

这个 a 是方程 $x=f(x)$ 的唯一解，因为若 a' 是另一解，则有：

$$d(a,\ a')=d(f(a),\ f(a'))\leqslant\lambda d(a,\ a'),$$

由此 $d(a,\ a')=0$，故 $a=a'$.

注意，上述方法提供了解 a 的实际近似计算法，因为公项为 $d(x_n,\ x_{n+1})$ 的级数较之公比为 λ 的几何级数收敛得更快．确切地讲，我们有

$$d(x_n,\ a)=\lim_{p\to\infty} d(x_n,\ x_{n+p})\leqslant d(x_0,\ x_1)\frac{\lambda^n}{1-\lambda}.$$

逼近序列的收敛还可能更快，例如，f 在 a 的一个邻域 V 上的限制是 $\lambda(V)$ 压缩映射，并且 V 的直径趋于 0 时 $\lambda(V)$ 趋于 0 的情形.

当空间 E 有界时，a 的存在与唯一性更明显，因为序列 $f^n(E)$ 下降，且直径 $\leqslant\lambda^n\delta(E)$.

例子　1）$E=R^n$，f 是比值为 $\lambda<1$ 的相似变换，点 a 就是相似中心，而相似中心的存在就是这样证明的.

2）设 $y=f(x)$ 是定义在有界闭区间 $E=[a,\ b]$ 上的可微数值函数，值域也含于 $[a,\ b]$ 内，并满足

$$|f'(x)|\leqslant\lambda,\ \lambda<1.$$

把 $[a,\ b]$ 映入自身的映射 f 是 λ 压缩映射，逐次逼近法可以应用.

本文不可能来讨论这方法对微分方程的应用了.

尺度空间的完备化

上面对完备空间的讨论表明提出完备空间是有益的．当一种数学理论归结为考虑一个非完备的尺度空间时，我们几乎总是要在空间中添加新的元素，使之成为完备空间．理论

上讲，完备化总是可能的；甚至在某种意义下，完备化还是唯一的．确切地讲，利用给定空间 E 的柯西序列，我们可以证明，存在一完备空间 $\hat{E}$，除同构不计外是唯一的，它包含一个与 E 同构的处处稠密子集(将这子集与 E 看成一样是适宜的)．

但是，如果我们不能指明添加到 E 的新元素，那么这种抽象的完备化一般没有什么用处；完备化的硬功夫就在于明确指出添加的新元素，有时这工作是困难的，可是常常很有益，因为这就表明理论发展的自然背景是什么．

例子．1) 设 E 是 [0, 1] 上的数值连续函数所成的向量空间，它的距离由下列范数决定：

$$\|f\|=\int_0^1|f(t)|dt.$$

这个尺度空间不完备．相应完备空间 $\hat{E}$ 的元素是[0, 1]上勒贝格可积函数（两个函数只在一零测度集合上不同时视为一样)．

用下面的范数

$$\|f\|^2=\int_0^1 f^2(t)dt$$

代替上面的范数可以得到一个类似的例子．

这时新函数是平方可积的可测函数．

2) 设 E 是定义在 R^2 内，在一紧集之外为零的连续可微函数所成的向量空间，其范数定义为

$$\|f\|^2=\iint\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

由此得到 E 上的距离．尺度空间 E 不完备；为完备化而添加到 E 的元素是具有若干有趣性质的新函数．

3. 一致收敛的拓扑结构

迄今，我们都是研究一个函数的性态；进一步可以研究函数族的性态．这方面的研究开宗明义第一章就是函数序列逐点收敛的概念．

定义 6 设 f 和 $f_n(n=1, 2, \cdots)$ 是把集合 E 映入拓扑空间 F 的映射，如果对每个 $x\in E$，有 $f_n(x)\to f(x)$，就说序列 f_n 逐点收敛于 f．

虽然这种收敛方式在数学上曾经起过重大作用，现在也仍然有其一席之地，但是按照不同的需要还建立了另外一些收敛方式，至今仍然有用(见以下各例)．

事实上，当我们讨论逐点收敛的函数序列的图象时，会发现这种收敛未能把我们对收敛的直观概念恰当地表达出来．

例如，设 f_n 是[0, 1]上的数值函数，定义如下：

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x(1-nx), & \text{当 } x\in\left[0,\ \dfrac{1}{n}\right],\\ 0, & \text{当 } x\in\left(\dfrac{1}{n},\ 1\right]. \end{cases}$$

序列 f_n 逐点收敛于函数 $f=0$，但 f_n 的图象却不收敛于 f 的图象，所以我们要引入一种新的收敛方式：

定义 7 设 f 和 $f_n(n=1, 2, \cdots)$ 是把集合 E 映入尺度空间 F 的映射．如果对每个 $\varepsilon>0$，存在一整数 n_0，使得对于每个 $x\in E$ 与每个 $n>n_0$，有 $d(f(x), f_n(x))<\varepsilon$，就说 f_n 一致收敛于 f．

在上面的例子中，f_n 不一致收敛于 0．故逐点收敛不蕴涵一致收敛．即使函数 f 与 f_n 连续，或者 E 是紧致集，或者 f_n 有界亦然．

反之，一致收敛显然蕴涵逐点收敛.

注意一个重要事实：上面的定义未假定定义域 E 有拓扑结构，但却要求值域 F 是尺度空间.

一致收敛的尺度结构与拓扑结构

设 $\mathfrak{F}(E, F)$ 是把 E 映入 F 的映射所成的集合（为简单计，假定空间 F 有界），我们可以在 $\mathfrak{F}(E, F)$ 中引入距离，使得对一致收敛的讨论更加直观、更加方便.

设 f 与 g 是把 E 映入 F 的两个映射. 如果对于每个 $x \in E$，有 $d(f(x), g(x)) \leqslant \varepsilon$，就说 f 与 g 是 ε 相近；这些 ε 中的最小数称为 f 与 g 之间的距离，也就是

$$d(f, g)=\sup_{x \in E} d(f(x), g(x)).$$

容易验明，$d(f, g)$ 的确是 $\mathfrak{F}(E, F)$ 上的距离；$\mathfrak{F}(E, F)$ 上这样定义的尺度称为一致收敛尺度.

现在可以对一致收敛给一个方便的解释：序列 (f_n) 一致收敛于 f 等价于 $d(f, f_n) \rightarrow 0$，换句话说，在 $\mathfrak{F}(E, F)$ 中的点列 (f_n) 收敛于点 f.

注意，如果把 F 的尺度换成另一个（关于一致结构）等价的尺度，那么在 $\mathfrak{F}(E, F)$ 上得到的两个尺度也是等价的，所以，一致收敛的概念只与 F 的一致结构有关.

连续函数的一致极限

如果我们现在假设定义域空间 E 具有拓扑结构，那么就可以研究一致收敛对连续函数的作用. 下面的基本定理的证明留作练习：

定理 4 设 E 是拓扑空间，F 是尺度空间. 如果把 E 映入 F 的连续映射序列一致收敛于映射 f，则 f 连续.

例子 设 (u_n) 是 $[0, 1]$ 上的连续数值函数序列，对于每

个 x 满足 $|u_n(x)|\leqslant a_n$ 并且级数 Σa_n 收敛，则级数 $\Sigma u_n(x)$ 一致收敛（即部分和序列 $S_n(x)$ 一致收敛），其和是一连续函数.

级数 $\Sigma \frac{1}{3^n}\cos(2^n x)$ 即是一例.

注意，对于逐点收敛没有类似定理，例如，可以构造 R 上的连续函数序列，逐点收敛于一个函数 f：$x=0$ 时 $f(x)=0$，$x\neq 0$ 时 $f(x)=1$

具有一致收敛尺度的连续函数所成的空间在数学上有重大的作用．特别，[0, 1] 上的连续数值函数空间 $C[0, 1]$ 最常用；这是体 R 上的（无限维）向量空间，它的一致收敛尺度由范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ 产生．对于这个尺度，它是完备的；容易证明它不是局部紧致的.

4. 结　　论

本文中，我们碰到几个概念：函数的一致连续，柯西序列，完备空间，一致收敛.

这些概念都是从空间的尺度出发定义的；不过我们已经指出，将尺度换成一致同构的尺度后，它们是不变的，所以，这些概念不是尺度概念，可以期望推广到非尺度空间.

实际上，对于拓扑群或者更一般的所谓一致空间都可以定义一些类似的概念．拓扑群是指一个群，具有拓扑结构，使得映射 $x\rightarrow x^{-1}$，$(x, y)\rightarrow x\cdot y$ 连续．一致空间是指具有某种结构的集合，满足与尺度空间相应的几条公理，使我们可以界说所有子集的微小级.

第四讲 某些函数空间与收敛方式的研究

J. Dixmier (索尔本大学讲师)

在前面有关拓扑空间的那些讲演中，我们是从一个实例(实数集)出发，从而上升到一般的公理．按照历史上的发展，还需要分析实数以外的一些例子，然后才能建立抽象的理论．其中，某些很重要的例子是函数空间提供的，所谓函数空间就是以函数作为元素的空间．函数空间在十九世纪末就开始深入研究了．

本文中，我们只给出几个函数空间的例子，据以阐述前面几讲中提到的某些一般概念．我们不讲有关函数空间的任何一般定理．

1. 第一个例子

用 C 表示定义在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的实值连续函数 $f(x)$ 的集合．若 $f\in C$, $g\in C$, 我们令[注]

$$d(f,\ g)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|.$$

我们证明 d 是 C 上的距离．为此必须验明下列性质：

1) 对任意的 $f,\ g\in C$, $0\leqslant d(f,\ g)<\infty$.

2) $d(f,\ g)=0$ 的充要条件是 $f=g$.

[注] 注意，$\varphi(x)=|f(x)-g(x)|$ 在一个闭区间上有上确界，用 $\sup\varphi(x)$ 表示，

3) 对任意的 $f, g\in C$, $d(f, g)=d(g, f)$.

4) 对任意的 $f, g, h\in C$, $d(f, h)\leqslant d(f, g)+d(g, h)$.

性质 1)、2)、3)是明显的. 又设 $f, g, h\in C$, 则对任意的 $x\in[0, 1]$有

$$\begin{aligned}|f(x)-h(x)| &\leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\\ &\leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|g(x)-h(x)|\\ &=d(f, g)+d(g, h).\end{aligned}$$

因此, $d(f, g)+d(g, h)$对任意 x 是$|f(x)-h(x)|$的上界, 所以是 $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-h(x)|=d(f, h)$的上界. 这就证明了性质 4).

于是, 就尺度空间讨论的所有概念都适用于空间 C. 我们说, 当 $n\to\infty$ 时, C 的函数序列 f_n 趋于 $f\in C$, 表成 $d(f_n,f)\to 0$, 意思是: 对每个 $\varepsilon>0$, 存在一整数 N, 使得关系 $n\geqslant N$ 蕴涵 $d(f_n, f)=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. 我们再考察一下 f_n 一致收敛于 f 的意义.

设(f_n)是 C 的函数序列. 微分学中有一个经典定理, 叫做柯西准则, 给出了 f_n 一致收敛的充要条件如下: 对每个 $\varepsilon>0$, 存在一整数 N, 使得只要 $m\geqslant N$, $n\geqslant N$, 则对任何 $x\in[0\ 1]$ 有 $|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$ (换句话讲, $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$, 亦即 $d(f_m, f_n)\leqslant\varepsilon$). 于是$(f_n)$一致收敛的充要条件可说成: 序列$(f_n)$是空间 C 中的柯西序列. 另一方面, 又一个经典定理告诉我们, 连续函数序列的一致收敛极限是连续函数, 由此可证 C 是完备空间.

定义在空间 C 上的实值函数是什么意思? 这是一个函数 A, 对于每个 $f\in C$, 它对应一个实数 $A(f)$. 函数 A 在 C

上连续意思是，当 f_n 一致收敛于 f 时，实数 $A(f_n)$ 在通常意义下趋于 $A(f)$.

例子. 1) 令 $A(f)=\int_0^1 f(x)dx$. 根据一个经典的定理，A 是 C 上的连续函数. 2) 令 $A(f)=f(1)$. 显然 A 是 C 上的连续函数.

现在考察把 C 映入 C 的映射，即变换 $g=T(f)$：对于每个 $f\in C$ 它对应一个 $g\in C$. T 连续的意思是：当 f_n 一致收敛于 f 时，$T(f_n)$ 一致收敛于 $T(f)$. 例子：1) $T(f)=f_0f$，这里 f_0 是一个固定的连续函数. 显然，T 连续. 2) $g=T(f)$ 定义如下：

$$g(x)=\int_0^1 e^{xy}f(y)dy.$$

g 是连续函数，我们证明 T 连续. 设序列 $f_n\in C$ 一致收敛于 $f\in C$. $g_n=T(f_n)$，$g=T(f)$. 我们有：

$$\begin{aligned}|g_n(x)-g(x)|&=\left|\int_0^1 e^{xy}f_n(y)\,dy-\int_0^1 e^{xy}f(y)\right|dy.\\&\leqslant\int_0^1 e^{xy}|f_n(y)-f(y)|dy\leqslant e\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}|f_n(y)-f(y)|\\&=ed(f_n,f),\end{aligned}$$

所以，$d(g_n,g)\leqslant ed(f_n,f)$，这就证明了 g_n 一致收敛于 g.

2. 第二个例子

仍取上面的集合 C. 对于 $f\in C$，$g\in C$，令

$$d'(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx.$$

我们证明 d' 是 C 上的一个距离. 上例中的性质 1)，2)，3) 是明显的. 三角形不等式也易证：因为对每个 $x\in[0,1]$ 有

$|f(x)-h(x)| \leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$, 故

$$\int_0^1 |f(x)-h(x)|dx \leqslant \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx + \int_0^1 |g(x)-h(x)|dx,$$

即
$$d(f, h) \leqslant d(f, g)+d(g, h).$$

这样, 同一函数集合 C 具有第二个尺度空间结构. 为区别计, 我们用 C' 表示新得的尺度空间. 在 C' 意义下的收敛称为平均收敛. 若连续函数列 f_n 在 C 的意义下收敛于f, 即一致收敛于连续函数 f, 则 f_n 在 C' 的意义下收敛于 f, 因为 $|f_n(x)-f(x)|$一致趋于 0, 故 $\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|dx$ 趋于 0. 然而其逆不真, 如下例所示: 设 $f_n(x)=x^n$, $f(x)=0$, 则

$$d'(f_n, f)=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1} \to 0, \ (n \to +\infty),$$

故 f_n 在 C' 的意义下趋于 f; 但是, f_n 不一致趋于 f, 因为

$$\sup_{0<x<1} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{0<x<1} x^n = 1.$$

因此, 在 C 上存在两种自然的收敛概念 (其实有无限多, 我们就不谈了). 在函数空间中这种现象是很常见的.

现在证明 C' 不是完备的. 定义连续函数 f_n 如下:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \\ 1, & \text{当 } \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

当 $\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant x < \frac{1}{2}+\frac{1}{n}$ 时, $f_n(x)$是线性函数.

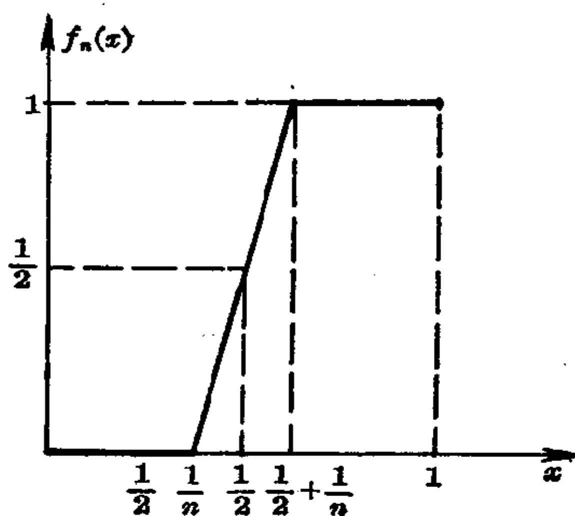


图 1

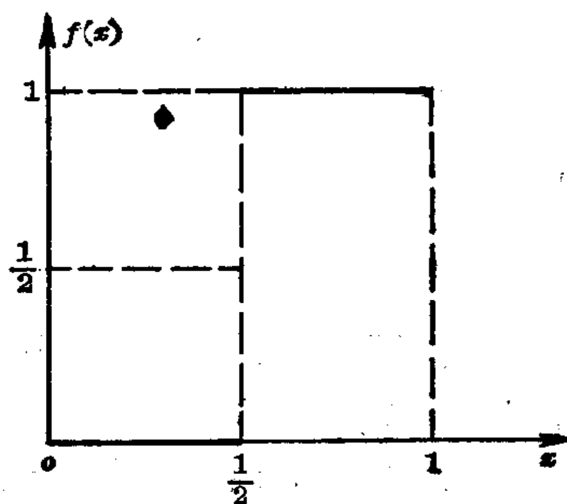


图 2

设
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x=\frac{1}{2},\\ 1, & \text{当 } \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

则 $\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx=\frac{1}{2n}\to 0$. 故

$$d'(f_m, f_n)=\int_0^1 |f_m(x)-f_n(x)|\,dx$$
$$\leqslant\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\,dx+\int_0^1 |f(x)-f_m(x)|\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\to 0.$$

所以,序列(f_n)是柯西序列. 假定存在一个连续函数 g, 使得 $d'(f_n, g)\to 0$ 则由三角形不等式得

$$\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx\leqslant\int_0^1 |f(x)-f_n(x)|\,dx$$
$$+\int_0^1 |f_n(x)-g(x)|\,dx,$$

上述不等式右端，当 $n\to+\infty$ 时趋于 0，故证得 $\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=0$. 然而 $f(x)-g(x)$ 除去 $x=\frac{1}{2}$ 外连续，故 f 与 g 只在 $x=\frac{1}{2}$ 处不同. 所以，$0\leqslant x<\frac{1}{2}$ 时 $g(x)=0$; $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ 时 $g(x)=1$，这与 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续相矛盾.

(通过添加新函数，例如添加上面的 f，将 C' 扩大，便可得到完备空间. 这是引入勒贝格意义下函数可积的手法).

再取第一个例子中考察过的函数 $A(f)=f(1)$. 这函数在 C' 上不连续. 事实上，设 $f_n(x)=x^n$，则在 C' 中 $f_n\to 0$. 然而，$A(f_n)=f_n(1)=1$ 不趋于 $A(0)=0$. 反之，函数 $A(f)=\int_0^1 f(x)dx$ 在 C' 上连续. 因为，如果 f_n 平均收敛于 f，则有

$$|A(f_n)-A(f)|=\left|\int_0^1 f_n(x)dx-\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_0^1|f_n(x)-f(x)|dx=d'(f_n, f)\to 0,$$

明所欲证.

3. 第三个例子

用 D 表示定义在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上有连续导数的实值函数 $f(x)$ 的集合(对于 $x=0$ 是指右导数，对于 $x=1$ 是指左导数). 若 $f\in D$, $g\in D$，令

$$\delta(f, g)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|+\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f'(x)-g'(x)|.$$

立即验明距离的头三条性质. 三角形不等式由下列关系推出：

$$
\begin{aligned}
&|f(x)-h(x)|+|f'(x)-h'(x)| \\
&\quad \leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)| \\
&\qquad +|f'(x)-g'(x)|+|g'(x)-h'(x)| \\
&\quad \leqslant \sup_{0<x<1}|f(x)-g(x)|+\sup_{0<x<1}|f'(x)-g'(x)| \\
&\qquad +\sup_{0<x<1}|g(x)-h(x)|+\sup_{0<x<1}|g'(x)-h'(x)| \\
&\quad =\delta(f,\ g)+\delta(g,\ h).
\end{aligned}
$$

所以 D 是尺度空间.

函数序列 $f_n\in D$ 收敛于函数 $f\in D$ 的意思是: f_n 一致收敛于 f, 以及 f'_n 一致收敛于 f'(根据 $\delta(f_n,\ f)$ 的定义).

空间 D 是完备的. 因为, 设 (f_n) 是 D 中的柯西序列, 则序列 (f_n) 与 (f'_n) 满足柯西准则, 故一致收敛于 f 与 g, 一个经典定理断定 $g=f'$. 因此, f_n 在 D 的意义下收敛于 f.

对于每个 $f\in D$, 令 $A(f)=f'\left(\frac{1}{2}\right)$, 则 A 是 D 上的连续函数. (但是, 如果只是 D 的函数序列一致收敛于 D 的 f, 则 $A(f_n)$ 不必收敛于 $A(f)$.) D 上的这个连续函数 $A(f)$, 就是许瓦兹在其《分布论》中所谓的双重泛函.

4. 第四个例子

在复平面上, 设 Δ 是由不等式 $|z|<1$ 确定的开圆盘. 令 H 是函数 $f(z)$ 的集合, 其中 $f(z)$ 是 Δ 上的全纯函数, 满足 $\iint\limits_{\Delta}|f(z)|d\sigma<\infty$($d\sigma$ 表示 Δ 内的面积元素). 对于 $f\in H$ 与 $g\in H$, 令

$$
d(f,\ g)=\iint\limits_{\Delta}|f(z)-g(z)|d\sigma.
$$

如同前面那些例子一样，可以验证 d 是距离(注意，因为 $\iint_\Delta |f|d\sigma<\infty$，$\iint_\Delta |g|d\sigma<\infty$，故 $d(f, g)<\infty$)，所以 H 是尺度空间，H 中由此产生的收敛也称为平均收敛。与第三个例子不同，下面要证明 H 是完备的。

首先证明，如果 $f\in H$，则对每个复数 ζ，$|\zeta|\leqslant a<1$ 时，我们有

$$|f(\zeta)|\leqslant\frac{1}{\pi(1-a)^2}\iint|f(z)|d\sigma. \tag{1}$$

令 Γ_r 与 Δ_r 分别表示中心为 ζ，半径为 r 的圆周与开圆盘；对于 $r<1-a$，它们含于 Δ 内，令 $z=\zeta+re^{i\theta}$ 便得：

$$\begin{aligned}|2i\pi f(\zeta)|&=\left|\int_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz\right|\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}|f(z)|r\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}|f(z)|d\theta.\end{aligned}$$

由此得：

$$\begin{aligned}\iint_\Delta|f(z)|d\sigma&\geqslant\iint_{\Delta_r}|f(z)|d\sigma=\int_0^r\int_0^{2\pi}|f(z)|\rho\,d\rho\,d\theta\\&\geqslant\int_0^r2\pi|f(\zeta)|\rho\,d\rho=\pi r^2|f(\zeta)|.\end{aligned}$$

由于上式对任意的 $r<1-a$ 成立，故得证(1)。

现设 (f_n) 是 H 中的柯西序列。对每个满足 $0\leqslant a<1$ 的数 a，令 D_a 是中心为 0，半径为 a 的闭圆盘。根据(1)有

$$d(f_m, f_n)\geqslant\pi(1-a)^2|f_m(\zeta)-f_n(\zeta)|,\ \zeta\in D_a.$$

所以，f_n 在整个 D_a 内一致收敛于一函数 f，根据外尔斯特拉斯定理，此函数 f 在 Δ 内全纯。此外，对每个 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，对于 $m, n\geqslant N$ 以及任意的 $a<1$ 有

$$\iint_{D_a}|f_m(z)-f_n(z)|d\sigma\leqslant\varepsilon,$$

所以，对于 $n\geqslant N$ 以及任意的 $a<1$ 有

$$\iint_{D_a}|f(z)-f_n(z)|d\sigma\leqslant\varepsilon,$$

因此，对于 $n\geqslant N$，我们有 $\iint_{A}|f(z)-f_n(z)|d\sigma\leqslant\varepsilon$. 故 $d(f_n, f)\to 0$ 即 f_n 在空间 H 内趋于 f.

5. 第五个例子

设 B 是定义在区间 $[0, 1]$ 上的所有实值函数 $f(x)$ 的集合. B 上最基本的收敛方式是逐点收敛：如果对每个 $x\in[0, 1]$，$f(x)$ 趋于 $g(x)$ 就说 f 趋于 g. 我们将证明，在 B 上不可能定义出一个距离，使得相应的收敛是逐点收敛. 这就表明：拓扑学不应该只研究尺度空间.

连续函数的集合 C 包含在 B 中. 设 C_1 是下述函数 $f\in B$ 的集合，这些 f 是 C 中函数序列逐点收敛极限. C_1 中的函数就是所谓的第一类函数. 可以证明，这里我们权且承认：C_1 中的函数至少在一点连续[注]. 要是逐点收敛可以由距离定义，则 C_1 就会是 B 中的闭集，即 C_1 是 C 在 B 中的闭包. 然而，我们却可以造出 C_1 的函数序列 (f_n)，逐点收敛于不在 C_1 中的一个函数 f. 作法分下列几步完成：

a) 函数 $f\in B$ 除了在一点处等于 1 外，处处为 0，这样的 f 属于 C_1（例如，f 是一序列逐段线性连续函数的逐点收敛极

[注] 有了 C_1，就可以定义"第二类函数"，即是 C_1 中一函数序列的逐点收敛极限， 这些函数的集合记为 C_2, …， 一般可以对任何序数 α 定义 C_α. 这是法国数学家贝尔 (R. Baire) 提出的函数分类概念. 正是贝尔证明了：C_1 中任何函数的连续点构成 $[0, 1]$ 的处处稠密集. ——译者注

限)。

b) 函数 $f\in B$ 除了在有限多个点处等于 1 外，处处为 0，这样的 f 属于 C_1（f 是有限多个 a)型函数的和)。

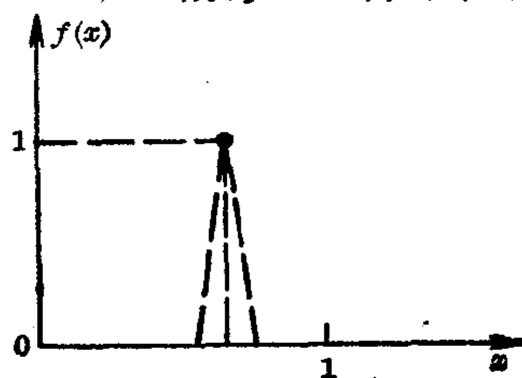


图 3

c) 设 $(r_1, r_2, \cdots)$ 是排成一序列的有理数集[注]. f_n 是除了在点 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 等于 1 外，处处为 0 的函数，则对每个 n, $f_n\in C_1$.

d) 序列 (f_n) 逐点收敛于一个函数 $f(x)$：x 为无理数时，$f(x)=0$; x 为有理数时，$f(x)=1$. 这个 f 没有任何连续点，所以不属于 C_1.

在下面一讲中，我们将看到，可以在 B 上定义一个拓扑结构，使得相应的收敛就是逐点收敛。

[注] 因为在 0 与 1 之间的有理数集是可数的，所以可以排成序列。

第五讲　一般拓扑的概念，拓扑空间的构造法

Ch. Pisot　(索尔本大学教授)

为了研究极限与连续的概念，需要定义一个元素的邻近元素．现在，我们已经知道，有了距离 $d(x, x')$，就可以给出这样的定义．如果数列 $d(x_n, x)$ 趋于 0，就说 x_n 趋于 x．因此，这一概念用到了实数集中极限的概念．然而，有一些性质与实数无关；另一方面，有些极限概念，即使很简单，却不能用距离来定义，所以就要求提出一个更一般的概念：元素的"邻域"．

例如，考虑定义在区间 $[a, b]$ 中的函数 $u_i(x)$ 通常的收敛概念．如果对每个 $x \in [a, b]$，数 $u_i(x)$ 趋于 0，就说 u_i 趋于 0．如果对函数 $u_i(x)$ 的集合不加任何限制，这就表达了关于函数 u_i 的不可数无穷多个独立条件；容易证明，不可能找到定义在函数 u_i 的集合中的一个距离，使我们可以定义函数 u_i 趋于 0．

在我们界定函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续之前，已经知道，连续性可用下列方式定义：区间 $(f(x_0)-\eta, f(x_0)+\eta)$ 的逆像包含一个区间 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$．任何集合，如包含一个含有 x_0 的开区间，就称为 x_0 的"邻域"．因此，若 $f(x_0)$ 的任何邻域的逆像都是 x_0 的邻域，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续．

因此，我们定义邻域时开集占有重要的地位．在尺度空间 E 的情形，开集 O 可以定义如下：如果对于 O 的每个元素 x_0，存在一数 $\rho>0$，使得所有满足 $d(x, x_0)<\rho$ 的 x 都属于 O，

则 O 是开集. 根据三角形不等式, 任何集合 $\{x|d(x, x_0)<\rho\}$ 都是开集. 这些开集满足下列三条与距离无关的性质.

O_1: 任意(有限或无限多个)开集的并集是开集.

O_2: 任意有限多个开集的交集是开集.

O_3: E 与 $\varnothing$ 是开集.

就 E 而言, O_3 是明显的; 对于 $\varnothing$ 则是规定. 对于 O_2, 要注意"有限"一词是少不得的, 这是因为, 若考虑开集$\{x|d(x, x_0)<\varepsilon_n\}$, 这里 $\varepsilon_n\to 0$, 设它们有公共点 $x_1\neq x_0$, 则有

$$d(x_1, x_0)<\varepsilon_n, \quad 故 \quad d(x_1, x_0)=0,\ x_1=x_0.$$

至于 O_1 几乎是明显的.

在任意集合 E 中, 如果我们确定了 E 的一族子集, 满足 O_1, O_2, O_3, 就说在 E 中定义了一个拓扑结构, 或者说 E 成为一个拓扑空间. 这些子集称为 E 的"开集".

例子 考虑仅由 E 及 $\varnothing$ 构成的集族, 它满足 O_1, O_2 与 O_3. 相应的拓扑称为最粗的拓扑.

另一例子: 设 E 是全序集合. 所有满足 $x<a$ 或 $a<x<b$, 或 $x>b$ 的元素 x 的集合称为"开区间", 开集就是有限多个或无限多个开区间的并集.

比如, 考虑一个单调函数 $f(x)$. 我们知道: 对每个 x, 存在右极限 $f(x+0)$ 与左极限 $f(x-0)$. 于是, 把 R 的每个实数 x 换成两个量, 分别记作 $x+0$ 与 $x-0$, 就从 R 得到一个集合 E, 依下列序关系成为全序集: 若在 R 内 $x<x'$ 则在 E 内 $x+0<x'-0$; 又 $x-0<x+0$. 这就定义了 E 中的开集, 从而定义了一个拓扑结构.

从开集的概念出发, 可以定义邻域的概念. 任何集合, 如果包含一个含有元素 $x\in E$(或子集 $A\subset E$)的开集时, 就称为 x(或子集 A)的邻域.

这概念表明开集是其每一点的邻域，反之亦然：任何集合 A，如果是它每一点的邻域，则 A 是开集．事实上，若 x 是 A 的一点，则存在一个开集 O_x，含有 x 且含于 A；A 显然是所有这些 O_x 的并集，故 A 是开集．

由此推出，如果知道了空间 E 中每一点的邻域，那么也就知道了 E 的所有开集．换言之，同一集合上的两个拓扑结构如果产生同样的邻域系，那么这两个拓扑结构是恒同的．

邻域具有下列性质，也可以作为出发点来定义拓扑结构：

V_1：x 的每一邻域含有 x．

V_2：每个包含 x 的一个邻域的集合是 x 的邻域．

V_3：x 的有限多个邻域的交集是 x 的邻域．

V_4：若 V 是 x 的一邻域，则存在 x 的邻域 W，使 W 含于 V，并且 V 是 W 的每一点的邻域．

性质 V_4 说明这样一个事实：任何一点，如果与 x 充分邻近的点充分邻近，它本身就与 x 邻近．这性质代替了尺度空间中的三角形不等式．为证明 V_4，只需取含于 V 且含有 x 的开集作 W 即可．

我们指出（但不详述），引入 E 的开集关于 E 的补集，可以得到一族集合，称为“闭集”，也可用来定义 E 的拓扑结构．

连续和极限　把拓扑空间 E 映入拓扑空间 F 的映射 f 称为在 E 的一点 u_0 处连续，如果对于 $f(u_0)$ 在 F 中的每个邻域 W，存在 u_0 在 E 中的邻域 V，使得 $f(V)$ 含于 W；或者说，$f(u_0)$ 在 F 中的每个邻域 W 的逆像 $f^{-1}(W)$ 是 u_0 在 E 中的邻域．如果映射 f 在 E 的每点连续，就说 f *在* E *上连续*．f 在 E 上连续的充要条件是：F 的每个开集 O_F 的逆像 $f^{-1}(O_F)$ 是 E 的开集 O_E．事实上，O_F 是其各点的邻域，因此，若 f 在 E

上连续，则 $f^{-1}(O_F)$ 是其每一点在 E 中的邻域，所以是 E 中的开集．反之，对 E 的每一点 u 以及 $f(u)$ 的每一邻域 W，存在开集 O_F 含有 $f(u)$ 且含于 W．若对每个 O_F，$f^{-1}(O_F)=O_E$，则 u 含于 O_E 故 $f^{-1}(W)$ 包含 O_E，$f^{-1}(W)$ 是 u 的邻域，从而 f 连续．

我们说，序列 u_n 趋于 u，如果对 u 的每一邻域 V，存在一整数 $N=N(V)$，使得 $n\geqslant N$ 蕴涵 u_n 属于 V．遗憾的是一个序列可能不止一个极限，例如，按照最粗的拓扑结构，每个 u 都是任何序列的极限．因此有必要特别提出下列拓扑空间：

隔离空间（或豪斯道夫空间） E 称为隔离的，如果它的邻域满足下列条件：

S：E 的两个不同的点具有两个不相交的邻域．

例子 E 是全序集．设 $x<x'$ 是两个不同的元素，a 与 b 使得 $a<x<x'<b$．

1° 存在 c 使得 $x<c<x'$，于是 (a, c) 与 (c, b) 是两个不相交的开集．

2° 不存在 c 使得 $x<c<x'$，于是 (a, x') 与 (x, b) 不相交，因为，如果有一个公共的元素 y，则 $y<x'$，$y>x$，故 $x<y<x'$．

拓扑子空间 设 E 是拓扑空间，A 是 E 的子集．E 的开集与 A 的交满足 O_1，O_2 与 O_3，所以得到 A 上的一个拓扑结构，使得把 A 映入 E 的包含映射连续．包含映射就是对于任何 $u\in A$ 相应地给出 $u\in E$ 的映射．

例子 R 的区间 (a, b) 中的拓扑结构以及 R^2 的子集圆周 $x^2+y^2=1$ 上的拓扑结构．

反过来讲，A 的开集不一定是 E 中的开集．要使 A 的开集都是 E 的开集，充要条件是：A 是 E 的开集．事实上，若 A

的开集都是 E 的开集，那么由于 A 是 A 的开集，故应是 E 的开集．反之，若 A 是 E 的开集，则 E 的任何开集与 A 的交是 E 的开集，即是 A 的开集都是 E 的开集．

两个拓扑空间的积 设 F 与 G 是两个拓扑空间，$u\in F$，$v\in G$，于是 $F\times G$ 就是所有点对 (u, v) 的集合．考虑投影映射 f 与 g，它们分别将 $(u, v)\in F\times G$ 映成 $u\in F$ 和 $v\in G$．我们在 $F\times G$ 中引进一个拓扑结构，使得 f 和 g 连续．于是对于 F 的开集 O_F，$f^{-1}(O_F)=O_F\times G$ 应是 $F\times G$ 中的开集；同样，对于 G 的开集 O_G，$F\times O_G$ 也应是 $F\times G$ 中的开集．这些开集的有限交集与任意并集也应是开集．如果我们将形如 $O_F\times O_G$ 的积称为基本开集，则我们要找的开集就应是基本开集的任意并集，这些并集的确满足 O_1，O_2 与 O_3．事实上，O_1 与 O_3 明显；今证 O_2：设 $A=\bigcup\limits_{\alpha} O_F^\alpha\times O_G^\alpha$，$B=\bigcup\limits_{\beta} O_F^\beta\times O_G^\beta$，由于 $\bigcap$ 对 $\bigcup$ 满足分配律，可见 $A\cap B=\bigcup\limits_{\alpha,\beta}(O_F^\alpha\times O_G^\alpha)\cap(O_F^\beta\times O_G^\beta)=\bigcup\limits_{\alpha,\beta}(O_F^\alpha\cap O_F^\beta)\times(O_G^\alpha\cap O_G^\beta$ 仍然是基本开集的并集．这样得到的拓扑空间 $F\times G$ 称为 F 与 G 的拓扑积．我们还可依次定义若干个拓扑空间的积．积是结合的．

连续性 设 φ 是把拓扑空间 E 映入拓扑积 $F\times G$ 的映射．令 $f=\mathrm{proj}_F\varphi$ 与 $g=\mathrm{proj}_G\varphi$，则 f 映 E 入 F，g 映 E 入 G．若 φ 连续，f 与 g 也连续．反之，若 f 与 g 连续，则 $f^{-1}(O_F)$ 和 $g^{-1}(O_G)$ 都是 E 的开集，所以 $\varphi^{-1}(O_F\times O_G)=f^{-1}(O_F)\cap g^{-1}(O_G)$ 是开集．因此，$F\times G$ 中基本开集的任意并集，即是它的任意开集在 φ^{-1} 下的像也都是 E 的开集，故 φ 连续．

同样可知，$w_n=(u_n, v_n)\in F\times G$ 趋于 $w=(u, v)\in F\times G$ 的充要条件是：在 F 中 $u_n\to u$，在 G 中 $v_n\to v$

例子 对于 R^2，开集是“方块”$(a, a')\times(b, b')$ 的并集.

若 F 与 G 是隔离空间，则 $F\times G$ 亦然. 事实上，若 (u, v) 和 (u', v') 是 $F\times G$ 中不同的点，只要 u 与 u' 是 F 中不同的点，则存在 $O_F\supset u$，$O'_F\supset u'$，使 $O_F\cap O'_F=\varnothing$. 于是不论 G 中的点 v 与 v' 的邻域 O_G 和 O'_G 如何，都有 $(O_F\times O_G)\cap(O'_F\times O'_G)=\varnothing$，而 $O_F\times O_G$ 是 (u, v) 的邻域，它与 (u', v') 的邻域 $(O'_F\times O'_G)$ 不相交.

反之，容易证明，若 $F\times G$ 是隔离空间，则 F 与 G 亦然.

逐点收敛的空间 设 E 是数值函数 $u(x)$ 的空间，$x\in[a, b]$. 满足 $|u(x_i)-u_0(x_i)|<\varepsilon\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 的 $u\in E$ 的集合称为 E 中的基本开集，记成

$$\omega=\omega(u_0, x_1, \cdots, x_n, \varepsilon).$$

有限多个或无限多个基本开集的并集称为“开集”. 这样规定的开集满足性质 O_1, O_2 与 O_3 所得到的拓扑结构叫做逐点收敛拓扑结构.

这个拓扑结构是隔离的. 事实上，若 $u_1\neq u_2$，则至少存在一 x_0，使得 $|u_1(x_0)-u_2(x_0)|=3\delta>0$，于是 $w(u_1, x_0, \delta)$ 与 $w(u_2, x_0, \delta)$ 是两个不相交开集，这是因为 $w(u_1, x_0, \delta)$ 是使得 $|u(x_0)-u_1(x_0)|<\delta$ 的 u 所成的集合.

第六讲　紧致空间与局部紧致空间

Ch. Pisot　(索尔本大学教授)

函数空间中极限的概念使我们特别重视具有下述性质的空间：其中任意无限多个函数至少有一极限函数．这个性质就是波尔查诺-外尔斯特拉斯对有界无限实数集所说的那个性质．由于M．蒙特尔的“正规族”的理论，上述性质在复变函数论中的重要作用已经极为明显．可以指出，变分学对一般拓扑的建立也有巨大的贡献．

然而，对于函数空间提出的问题，波尔查诺-外尔斯特拉斯定理的提法似乎并非总是最合适的形式．对于实数空间 R，有一个与波尔查诺-外尔斯特拉斯定理等价的、更令人满意的定理，就是波莱尔-勒贝格定理，这个定理才使我们能够定义一些极为有用的空间．

紧致空间　空间 E 称为*紧致的*，如果满足下列两个条件：

1°　E 是隔离的．

2°　对于 E 的每个由开集组成的覆盖(开覆盖)，可以从中选出有限多个开集，组成一个覆盖．

例如 R 的每一有界区间是紧致的[注]，但整个 R 并不如此．

[注]　这里应该是：R 的任何有界闭区间是紧致的，例如$\left(\frac{1}{n},1\right)$($n=2$, 3, …)显然是(0, 1)的开覆盖，但不可能选出有限子覆盖．——译者注

紧致空间的定义可对偶地表述如下：E 称为紧致的，如果 E 是隔离的，并且对于 E 的任何一族闭集，只要其中任何有限子族都有非空的交，则整个集族也有非空的交，这后一定义显然表明，在紧致空间中，如果一族闭集 ϕ_i 按包含关系是全序族，则所有 ϕ_i 的交集非空，由此得到紧致空间 E 的波尔查诺-外尔斯特拉斯定理．事实上，对于 E 的一族无限多个元素 a_n，令 $A_n=\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$，$\overline{A}_n$ 是 A_n 的闭包，则 $\overline{A}_{n+1}\subset\overline{A}_n$．于是所有 $\overline{A}_n$ 的交集非空，这个交集的每个元素都是 a_n 所成集合的接触点．

这里要注意，逆命题一般不成立，即是具有波尔查诺-外尔斯特拉斯定理所说性质的隔离空间不一定是紧致的．然而，后面会看到对于尺度空间逆命题是成立的．

容易看出，紧致空间的闭子空间是紧致的，同样，隔离空间的有限多个紧致子集的并集或交集是紧致空间．有限多个紧致空间的积(拓扑空间的积)是紧致空间；例如，n 维环面 T^n 是紧致的，因为圆周是紧致的．

连续性与紧致性　我们有下述定理：如果连续映射 f 把紧致空间 E 映入隔离空间 F，它就把 E 映成一个紧致空间 $f(E)$．

事实上，1° 空间 $f(E)$ 是隔离的，因为它是隔离空间 F 的子空间．

2° 设空间 $f(E)$ 有一个覆盖，由 $f(E)$ 的开集 ω_i 组成．这些开集可以表为 $\omega_i=f(E)\cap\Omega_i$ 这里 Ω_i 是 F 的开集．由 f 的连续性推知，集合 $f^{-1}(\omega_i)=f^{-1}(\Omega_i)$ 是 E 的开集，它们构成 E 的覆盖．因 E 是紧致空间，故可选出有限子覆盖，经过映射 f，得到 $f(E)$ 的一个有限覆盖，由某些开集 ω_i 组成．故 $f(E)$ 是紧致空间．

特别，若 $F=R$，即 f 是数值函数，则上述定理成立，所以一个紧致空间 E 在 R 中的连续像是紧致空间；特别，$f(E)$ 有界，并且 E 中存在某些元素，使 f 达到它的上确界与下确界.

紧致尺度空间 每个尺度空间都是隔离的，所以要使尺度空间是紧致空间，充要条件是波莱尔-勒贝格定理成立．我们已经知道，对于紧致尺度空间，这个条件蕴涵波尔查诺-外尔斯特拉斯定理．对于尺度空间其逆亦真，亦即波尔查诺-外尔斯特拉斯定理蕴涵紧致性.

事实上，考察尺度空间 E 的一个覆盖，由开集 ω_i 组成．对于 E 的每个元素 x 设 $\rho(x, i)\geqslant 0$ 是中心在 x 并含于 ω_i 的开球的最大半径，令 $\rho(x)=\sup\rho(x, i)$（就所有开集 ω_i 而言）．若 $d(x, x')$ 表示 x 与 x' 之间的距离，则有

$$|\rho(x, i)-\rho(x', i)|\leqslant d(x, x').$$

故 $|\rho(x)-\rho(x')|\leqslant d(x, x')$；从而，$\rho(x)$ 是 E 上的连续函数．因为 E 中任何元素至少属于一个 ω_i，所以 $\rho(x)>0$，因此波尔查诺-外尔斯特拉斯定理蕴涵 $\rho(x)$ 在 E 上的下确界 $\rho=\inf\rho(x)>0$．从而，对每个 x，存在指标 i_x 使得 $\rho(x, i_x)>\frac{\rho}{2}$．若 x_1 使得 $\omega_1=\omega_{i_{x_1}}$ 不覆盖 E，我们取不属于 ω_1 的一个元素 x_2，如此继续下去[注]，得序列 $x_1, x_2, \cdots$没有接触点，这是因为序列中任何两个元素的距离都超过 $\rho/2$．于是，如果波尔查诺-外尔斯特拉斯定理在 E 中成立，则上述序列是有限序列，从而从诸 ω_i 中选出了覆盖 E 的有限子族.

一致连续 设 E 是尺度空间，f 是把 E 映入尺度空间 F 的连续映射．若 E 是紧致空间，则映射 f“一致连续”．事实

[注] 这里还应交代一句：若 $\omega_1\cup\omega_2$ 不覆盖 E，则取 $x_3\notin\omega_1\cup\omega_2$．——译者注

上，对于任何 $x\in E$ 和任何 $\varepsilon>0$ 存在 $\eta_x>0$，使得 $d_E(x, y)<\eta_x$ 蕴涵 $d_F(f(x), f(y))<\varepsilon$. 然而满足 $d_E(x, y)<\frac{1}{2}\eta_x$ 的点 y 的集合是 E 的开球 B_x，诸 B_x 构成 E 的覆盖．若 E 是紧致空间，便可从中选出有限覆盖 $\{B_{x_i}\}$.

于是，令 $\eta=\min\frac{1}{2}\eta_{x_i}$; 考虑 E 的一个元素 x 它属于某个 B_{x_i}，例如 B_{x_1}. 设 y 是 E 的另一个元素，满足 $d_E(x, y)<\eta$，则 $d_E(y, x_1)\leqslant d_E(y, x)+d_E(x, x_1)<\eta+\frac{1}{2}\eta_{x_1}\leqslant\eta_{x_1}$，故 y 也属于 B_{x_1} 所以得

$$d_F(f(x), f(y))\leqslant d_F(f(x), f(x_1))+d_F(f(x_1), f(y))<2\varepsilon.$$

连通性 如果对尺度空间 E 的任意两个元素 a 与 b，以及每个 $\varepsilon>0$ 可以相应求得 E 的有限多个元素 $a=a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n=b$ 组成的链（可能与 ε 有关），使得 $d(a_i, a_{i+1})<\varepsilon$ 就说 E 链式连通．例如，R 的有界闭区间链式连通，Q 的有界闭区间亦然.

若 E 是链式连通的紧致尺度空间，f 是把 E 映成尺度空间 F 的连续映射，则 $f(E)$ 是紧致空间，f 一致连续，所以 $f(E)$ 链式连通.

一个链式连通的紧致尺度空间 E 是连通的，即 E 不能分成两个非空的不相交的闭集．事实上，假若不然，设 E' 与 E'' 是这样两个非空的互不相交的闭集，则对 $x'\in E'$，$x''\in E''$ 我们有 $\inf d(x', x'')\neq 0$，否则存在 $x_0'\in E'$ 与 $x_0''\in E''$ 满足 $d(x_0', x_0'')=0$，故 $x_0'=x_0''$，E' 与 E'' 就不是互不相交的了.

特别在 R 上，每个链式连通的紧致集是闭区间，所以，紧致尺度空间 E 上的数值连续函数取得 $\sup f(E)$ 与 $\inf f(E)$

之间的一切值[注1].

局部紧致空间 空间 R 不是紧致的，然而它在每一点的邻近的性态却很像紧空间. 确切地讲，如果 E 是隔离的，并且 E 的每一点都具有紧致邻域，就说 E 是局部紧致空间. 例如，R 就是局部紧致的.

一个局部紧致空间可以添加唯一一个元素，即所谓无穷远点，而成为紧致空间. 为此，考虑 E 中的集合，其闭包是紧致集，这些集合的补集构成的集族 V 具有下列性质：任何集合，如果含有 V 的一个集合，本身就属于 V；V 中任意有限多个集合的交集属于 V. 两条性质就是用元素的邻域来定义拓扑结构时那个公理系统中的两条. 于是我们可以确定一个补充的元素 ω，规定族 V 是 ω 的邻域族. 这样，集合 $\{E, \omega\}$ 就是紧致的了. 因为，设有 $\{E, \omega\}$ 的一覆盖，考虑含有 ω 的开集 Ω 它的补集是紧致的，故可被有限多个开集 Ω_i 所覆盖，所以开集 Ω_i 与 Ω 就构成了 $\{E, \omega\}$ 的有限覆盖[注2].

完备尺度空间 尺度空间叫做完备的，如何每一柯西序列都收敛. 实数集 R 是完备的，但有理数集 Q 不是完备的. 我们有下述命题：

任何紧致尺度空间都是完备的.

事实上，设 (a_n) 为柯西序列，即对每一 $\varepsilon>0$，存在 n，使得 $h\geqslant n$，$k\geqslant n$ 时，$d(a_h, a_k)<\varepsilon$. 令 $A_m=(a_m, a_{m+1}, \cdots)$，$\overline{A}_m$ 是 A_m 的闭包，则 $\overline{A}_{m+1}\subset\overline{A}_m$. 若 a' 与 a'' 是 $\overline{A}_m$ 的两个元素，

[注1] 空间 E 还应是链式连通的. ——译者注

[注2] 还应指出：$\{E, \omega\}$ 是隔离的，只须考虑 $x\in E$ 和 ω，这是显然的，因为 E 局部紧致；此外，E 作为 $\{E, \omega\}$ 的子空间是处处稠密的，而且同胚于原来的空间 E. 这样得到的 $\{E, \omega\}$ 称为 E 的单点紧致扩充——译者注

则有

$$d(a', a'') \leqslant d(a', a_h) + d(a_h, a_k) + d(a_k, a''), \quad h \geqslant n, k \geqslant n.$$

又对任何 $\varepsilon' > 0$ 存在 $h \geqslant n$, $k \geqslant n$, 使得 $d(a', a_h) < \varepsilon'$, $d(a_k, a'') < \varepsilon'$. 因 (a_n) 是柯西序列, 故 $d(a', a'') < 2\varepsilon' + d(a_h, a_k) < \varepsilon$. 命 A 是所有 $\overline{A}_m$ 的交集. 因空间紧致, 故 A 非空. 设 a 与 b 是 A 的两个元素, 它们属于每个 $\overline{A}_m$, 故对任意 $\varepsilon > 0$ 有 $d(a, b) < \varepsilon$, 所以 $d(a, b) = 0$, $a = b$, A 由唯一元素 a 组成. 故柯西序列有唯一接触点, 从而收敛.

巴拿赫空间 下面将定义体 K 中绝对值的概念. 设 E 是体 K 上的向量空间, K 中定义了 $\alpha \in K$ 的绝对值, 用 $|\alpha|$ 表示. 把 E 映入正实数集的映射 $x \to \|x\|$ 称为范数, 如果满足下列条件:

1° $x \neq 0$ 时 $\|x\| > 0$; $\|0\| = 0$.

2° 对每一 $\alpha \in K$ 有 $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

这时, 空间 E 称为赋范向量空间.

如果在这样的空间中, 令

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

它就成为尺度空间.

一个体 K 总可视为自身上的向量空间, 如果它是赋范向量空间, 则元素 $\alpha \in K$ 的范数用 $|\alpha|$ 表示, 称为 α 的绝对值.

定义 在具有绝对值的体上的赋范向量空间, 如果是完备尺度空间, 就称为巴拿赫空间.

赋范向量空间的完备化 每个不完备的赋范向量空间 E 总可扩张成巴拿赫空间 $\hat{E}$.

事实上, 令 $X = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 是 E 中的柯西序列, 即对任何 $\varepsilon > 0$ 存在一个 n 使得 $h \geqslant n$, $k \geqslant n$ 时 $\|x_h - x_k\| < \varepsilon$. 令

$Y=(y_1, \cdots, y_n, \cdots)$是另一柯西序列，令

$$\alpha X=(\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n, \cdots),\ \alpha\in K,$$

$$X+Y=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n, \cdots).$$

易知 αX 与 $X+Y$ 仍是柯西序列，故所有柯西序列构成 K 上一个新的向量空间.

我们有$\|x_h\|=\|x_h-x_k+x_k\|\leqslant\|x_h-x_k\|+\|x_k\|$，故 $h\geqslant n$, $k\geqslant n$ 时，

$$\|x_h\|-\|x_k\|\leqslant\|x_h-x_k\|<\varepsilon.$$

交换 h 与 k，同样有

$$\|x_k\|-\|x_h\|\leqslant\|x_k-x_h\|<\varepsilon.$$

因此实数序列 $\|x_1\|, \cdots, \|x_n\|, \cdots$ 是柯西序列，即它收敛于一实数$\geqslant 0$.

现在令 $\|x\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$ 则有

$$\|\alpha X\|=\lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=|\alpha|\,\|X\|,$$

$$\|X+Y\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\|\leqslant\|X\|+\|Y\|.$$

但是，$\|X\|=0$ 并不蕴涵 $X=0=(0, \cdots, 0, \cdots)$，故$\|X\|$不是范数. 事实上，考虑柯西序列 $Z=(z_1, \cdots, z_n, \cdots)$，这里 $\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n\|=0$，令 ζ 是所有这些柯西序列的集合，所以其中每个序列都满足 $\|Z\|=0$. 若 $Z\in\zeta$, $Z'\in\zeta$，则 $\alpha Z\in\zeta$, $Z+Z'\in\zeta$；关系 $X'\sim X\leftrightarrow X'-X\in\zeta$ 是一等价关系. 设 ξ 是 X 的等价类，η 是 Y 的等价类，令 $\alpha\xi$ 是 αX 的等价类，$\xi+\eta$ 是 $X+Y$ 的等价类；这些运算对等价类有定义，从而所有这等价类的集合构成一向量空间 $\hat{E}$. 等价类 ζ 是 $\hat{E}$ 的零元素.

若 $X'\sim X$ 则有 $X'=X+Z$, $Z\in\zeta$，故 $\|X'\|\leqslant\|X\|$ (因 $\|Z\|=0$)，同样$\|X\|\leqslant\|X'\|$，所以$\|X''\|=\|X\|$. 令$\|\xi\|=\|X'\|$

$=\|X'\|$ 则$\|\xi\|$是范数：事实上，性质 2° 和 3° 已经证明；1° 也成立，因为若$\|\xi\|=0$，则$\|X\|=0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=0$，$x\in\zeta$，所以$\xi=\zeta$.

若$x\in E$，我们令$\hat{x}$是$(x, \cdots, x, \cdots)$的等价类，于是，$\widehat{\alpha x}=\alpha\hat{x}$，$\widehat{x+y}=\hat{x}+\hat{y}$，故$E$同构于$\hat{E}$的一个子空间，将$\hat{E}$的这个子空间与$E$等同，所以$\hat{E}$是包含$E$的赋范向量空间.

将上面的过程用到体K得到向量空间$\hat{K}$，可以证明：$\hat{K}$本身是一个体．若$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots)$是$K$中元素的绝对值构成的柯西序列，其等价类$\alpha$属于$\hat{K}$．另一方面，序列$(\alpha_1 x, \cdots, \alpha_n x, \cdots)$是$E$的柯西序列，故它的等价类属于$\hat{E}$，用$\alpha\hat{x}$表示．由此不难推出$\hat{E}$是$\hat{K}$上的向量空间.

向量空间$\hat{E}$是完备的　事实上，令$(\xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots)$是$\hat{E}$的柯西序列，即对每一$\varepsilon>0$，存在$n$，使得

$$h\geqslant n,\ k\geqslant n \text{ 时},\quad \|\xi_h-\xi_k\|<\varepsilon.$$

令ξ_m是X_m的等价类，这里$X_m=(x_{m,1}, \cdots, x_{m,p}, \cdots)$，则$p\geqslant N_m$时，$\|\xi_m-\hat{x}_{m,p}\|=\lim\limits_{q\to\infty}\|x_{m,q}-x_{m,p}\|<\varepsilon$．相应于每个$\xi_m$，可以得到元素$\hat{y}_m$，满足$y_m=x_{m,N_m}$，于是$\|\xi_m-\hat{y}_m\|\leqslant\varepsilon$，所以：

对于$h\geqslant n$，$k\geqslant n$，$\|\hat{y}_h-\hat{y}_k\|\leqslant\|\hat{y}_h-\xi_h\|+\|\xi_h-\xi_k\|+\|\xi_k-\hat{y}_k\|<3\varepsilon$．而$\|\hat{y}_h-\hat{y}_k\|=\|y_h-y_k\|$，故序列$Y=(y_1, \cdots, y_n, \cdots)$是$E$的柯西序列．若$\eta$是$Y$的等价类，则有

$$\|\eta-\xi_m\|\leqslant\|\eta-\hat{y}_m\|+\|\hat{y}_m-\xi_m\|.$$

但是$m\geqslant n$时，$\|\eta-\hat{y}_m\|=\lim\limits_{p\to\infty}\|y_p-y_m\|\leqslant3\varepsilon$，而$\|\hat{y}_m-\xi_m\|\leqslant\varepsilon$，所以$m\geqslant n$时，$\|\eta-\xi_m\|\leqslant4\varepsilon$．即$\xi_m\to\eta$，空间$\hat{E}$完备.

应用　考虑有理数体Q．研究Q上所有可能的绝对值，我们发现：除了通常的绝对值以外，还有下面的绝对值：设

$p\geqslant 2$ 是一固定素数，令 $r=\frac{u}{v}$ 是一有理数．可以把 $\frac{u}{v}$ 写成形式 $p^n\frac{u'}{v'}$，这里 u'，v' 不能被 p 整数，指数 n 是正，负整数或零．令 $|r|_p=\frac{1}{p^n}$ 容易验证这是绝对值．按照通常的绝对值使 Q 完备化便得 R．按照绝对值 $|r|_p$ 使 Q 完备化则得到一个新的完备体 R_p，在 R_p 上我们可以构造一种分析，使我们有可能得到实数分析得不出的结果．

第七讲　代数结构与拓扑结构的相容性．拓扑群与拓扑向量空间

R. Godement　（索尔本大学教授）

标题所示内容很广泛，例如，包括拓扑群，函数空间等．我们将只讨论拓扑向量空间的几个重要性质，略见一斑．

1．拓扑向量空间的定义

复习一下定义在一个体（我们只用实数体 R，复数体的情形类似）上的向量空间 E：E 关于一个交换运算构成群，这个运算记为加法（对于 E 的一对元素 x，y，相应地得到 E 的元素 $x+y$，称为这两个元素的和）；E 上还定义有 E 的元素与 R 的元素的乘法：对于 $x\in E$ 与 $\lambda\in R$，相应地有 $\lambda x\in E$，这个运算法则对于 R 的元素是结合的，对于 R 中的加法与 E 中的加法是分配的，并且 $1\cdot x=x$．

E 的元素 x 称为点，或者向量，在几何表示中，如果把一个向量的起点放在 O 则该向量同它的终点将不予区别，如同复数的表示那样．

再假定 E 上还定义了一个拓扑结构．就是说，在 E 上确定了一族开集，或一族闭集，或者点的邻域，或者说明了序列的收敛性条件或函数的连续性条件．

但是，要得到有意义的特性，必须要有某些关系，使原有

的代数结构与引入的拓扑结构相容：拓扑向量空间就是具有拓扑结构的向量空间，满足下列条件：

1) 函数 $x+y$ 对 x 与 y 连续.

2) 与 3) 关于 R 上通常的拓扑结构和 E 上引进的拓扑结构，函数 λx 对 λ 与 x 连续.

这些条件可用序列的收敛性条件表成：若 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 收敛于 x，$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 收敛于 y，则序列 $\{x_n+y_n\}$ 应收敛于 $x+y$. 还有，若序列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ 收敛于 λ，则序列 $\{\lambda_n x_n\}$ 应收敛于 λx.

也可以从 E 的开集出发表达上述定义中的条件：我们要侧重讨论的就是这方面的内容.

2. 用开集条件定义拓扑向量空间的公理

设给定 $a\in E$，对于 E 的每个元素 x，可以相应地得到 $x+a$(由 x 平移而得). 若 x 是 E 的子集 U 的一般元素，我们用 $U+a$ 表示点 $x+a$ 所成的集合. 映射 $x\to x+a$(及其逆 $x\to x-a$)应连续，所以，U 是开集等价于对任意 a，$U+a$ 是开集.

同样，对于 $\lambda\neq 0$，映射 $x\to\lambda x$ 应该对 x 连续，特别，若 x 是 O 的一个邻域内的一般点，λx 也是一个邻域内的一般点.

由此提出下列公理：

公理 I 关于任意向量的平移，E 的开集变成开集. 关于中心在 O、比值任意的位移，O 的邻域变成 O 的邻域.

因此，为了确定 E 上的拓扑结构，只需说明原点 O 的所有邻域的特性，以保证条件 1)，2) 与 3) 在原点成立. 条件 3) 已经说明，还剩下条件 1) 和 2).

函数 $x+y$ 在原点连续，意思是：对 O 的任意邻域 U，存在 O 的两个邻域 V 与 W，使得

$$x\in V,\ y\in W\Rightarrow x+y\in U.$$

亦即 $V+W\subset U$.

现设 U' 是 V 与 W 的交集，这是 O 的邻域，故上面条件等价于：

公理 II 对 O 的任意邻域 U，存在 O 的邻域 U'，使得 $U'+U'\subset U$.

最后还要说明映射 $\lambda\rightarrow\lambda x_0$ 与 $(\lambda,\ x)\rightarrow\lambda x$（在点 $\lambda=0$，$x=0$）的连续性.

为了简化表达，一个集合 X 如果与任何一条通过 O 的直线的交集是中心在 O 的一个非空区间，就说 X 是星状对称集. 利用这一术语，最后的两个条件可表述成：

公理 III 在 O 的每个邻域内，存在一个星状对称的子邻域.

换句话讲，O 的所有星状对称邻域构成 O 的一个邻域基.

3. 局部凸的拓扑向量空间

在平面内，按照通常的拓扑，一个集合 A 叫做凸集，如果对于 A 的任意两点 a 与 b，线段 ab 上任意一点仍属于 A. 同样，根据直线段的分析定义，对于实数体上的任何向量空间，子集 A 叫做凸集，如果：

$$\forall x,\ y\in A,\ \forall\lambda\in[0,\ 1],$$

我们有
$$\lambda x+(1-\lambda)y\in A.$$

一个拓扑向量空间叫做局部凸的，如果原点的每一邻域

都包含原点的一个凸邻域．这个条件在平移与位似作用下保持不变．

带有通常尺度的空间 R^n 显然满足这个条件，因为 O 的每个邻域包含一个中心在 O 的球，球当然是凸邻域．实际上，已经遇到过的那些拓扑向量空间几乎都是局部凸的，特别在分析中是这样．在代数中倒未必如此．

4. 赋 范 空 间

实数体上一个拓扑向量空间中定义的半范数是一个数值函数 $p(x)$，满足下列条件：

1) $p(x)$ 是一正数或零；

2) $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$；

3) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$．

特别，注意 $p(-x)=p(x)$，$p(0)=0$．

此外，若 $p(x)$ 仅当 $x=0$ 时为 0，即

4) $p(x)=0\Rightarrow x=0$，

则函数 $p(x)$ 叫做范数，记成：

$$p(x)=\|x\|.$$

具有范数的向量空间叫做赋范空间．

向量空间上如果存在范数，则可以导出相应的拓扑结构，两个点 x 与 y 之差的范数称为两点的距离：$d(x,y)=\|x-y\|$，这个数满足距离的公理，从而这个向量空间成为尺度空间．于是可定义球是满足 $d(x,a)<\rho$ 的 x 的集合，它可看作开集，而 a 的邻域定义成一个子集，它包含一个含有 a 的球．

剩下要验明，这样定义的拓扑结构与向量空间的结构是相容的：

$$d(x+y,\ x_0+y_0)=\|(x+y)-(x_0+y_0)\|$$
$$=\|(x-x_0)+(y-y_0)\|$$
$$\leqslant\|x-x_0\|+\|y-y_0\|.$$

即是 $$d(x+y,\ x_0+y_0)\leqslant d(x,\ x_0)+d(y,\ y_0).$$

而 $$\left.\begin{matrix}x\to x_0,\\ y\to y_0\end{matrix}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{matrix}d(x,\ x_0)\to 0,\\ d(y,\ y_0)\to 0\end{matrix}\right\}$$
$$\leftrightarrow d(x+y,\ x_0+y_0)\to 0,$$

故 $$\left.\begin{matrix}x\to x_0,\\ y\to y_0\end{matrix}\right\}\text{ 蕴涵 }\ x+y\to x_0+y_0.$$

同样，$x\to x_0$ 与 $\lambda\to\lambda_0$ 蕴涵 $\lambda x\to\lambda_0 x_0$.

5．赋范空间的例子

显然，空间 R^n 是赋范空间．但是，这个概念对于函数空间尤其重要，函数空间是无穷维的，元数可以是函数，测度等等．

例 1 命 E 是实变数 t 的有界实函数 $x(t)$ 的集合，例如对 $t\in[0,\ 1]$ 有定义．对于每个这样的函数 x，其绝对值的上确界是确定的，所以是 x 的函数

$$K(x)=\sup_t|x(t)|<+\infty.$$

显然，$K(x)$ 是正的，是函数 x 所成集合中的范数．事实上：

$$K(x+y)=\sup_t|x(t)+y(t)|$$
$$\leqslant\sup_t(|x(t)|+|y(t)|)$$
$$\leqslant K(x)+K(y),$$
$$K(\lambda x)=\sup_t(|\lambda|\,|x(t)|)=|\lambda|K(x),$$

最后，$K(x)=0$ 蕴涵对任意 t 有 $|x(t)|=0$.

如上定义的范数，我们已经说过，在 E 上引入一相应的拓扑结构；序列 $x_n(t)$ 的收敛由条件 $d(x, x_n)\to 0$ 确定．这里

$$d(x, x_n)=\|x-x_n\|=\sup_t |x(t)-x_n(t)|.$$

一个函数的上界小于 ε，就是说，对于任意 t，函数小于 ε；于是上述收敛性可以表成：

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$，使得 $n>N$ 蕴涵对每个 $t\in[0, 1]$ 有

$$|x(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

这是我们熟知的一致收敛的特性.

另一些例子 可以考虑上述空间的某些子集合，例如 $[0, 1]$ 上的连续函数的集合(这种函数是有界的)，可微函数的集合，n 次可微函数的集合，或者无限可微函数的集合.

也可以改变范数的定义，例如，$[0, 1]$ 上的连续函数集合中，可以取

$$\|x(t)\|=\int_0^1|x(t)|dt,$$

它自然满足范数公理.

6．局部凸拓扑向量空间的结构

我们来证明，这样的空间不总是赋范空间．为了得到最一般的空间，必须从一族半范数 $p_\alpha(x)$ 出发，诸 α 是参数，可以有无限多个.

从这族半范数中，选出有限多个半范数 $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \cdots, p_{\alpha_n}$，相应于每个半范数 p_{α_i} 给出一个正数 ε_i 然后，得到原点的一个邻域，即是满足 $p_{\alpha_i}(x)<\varepsilon_i$ 的那些 x 的集合，记为 $B(p_{\alpha_i}, \varepsilon_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$．最后，令 A 是这 n 个邻域的交集.

因此，对于任何有限多个参数 α，都可以相应地得到原点的一个邻域 A. 我们将这些 A 所成的集合 $\mathscr{A}$ 取作 O 的基本邻域系（即 E 的每一子集，如包含一个集合 A，就是 O 的邻域）. 这就把只有一个范数的情形推广了.

现证这样确定的拓扑结构使 E 成为局部凸空间. 为此只需证明诸 A 是凸集，这只要诸 $B(p_{\alpha_i}, \varepsilon_i)$ 是凸集就行了. 因为凸集的交集是凸集. 今设 $p_{\alpha_i}(x)<\varepsilon_i$, $p_{\alpha_i}(y)<\varepsilon_i$, 对于 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 根据半范数的公理有

$$\begin{aligned}p_{\alpha_i}[\lambda x+(1-\lambda)y]&\leqslant p_{\alpha_i}(\lambda x)+p_{\alpha_i}[(1-\lambda)y]\\&\leqslant|\lambda|p_{\alpha_i}(x)+|1-\lambda|p_{\alpha_i}(y)\\&<\lambda\varepsilon_i+(1-\lambda)\varepsilon_i=\varepsilon_i.\end{aligned}$$

反之，可以证明，任何局部凸的拓扑向量空间 E 上，存在一族半范数，可以按照刚才所讲的方法重新得到 E 上原有的拓扑结构.

例子 单个实变数的无穷可微函数 $x(t)$. （这个讨论可以推广到多变量函数）. 为了定义其分布，L. 许瓦兹还假定这些函数当 t 超过某一有限值（与特定函数有关）时为零. 我们这里不作这一补充假设.

显然，这些函数的集合 E 是向量空间，还可以赋予集 E 某些拓扑结构，例如，可以定义，如果对每一 t 值，$x_n(t)$ 收敛于 $x(t)$，就说 x_n 收敛于 x. 这样的定义没有用到 $x(t)$ 可微的假设，下面引入一种很强的拓扑结构：$x_n(t)$ 叫做收敛于 $x(t)$，如果：1）在任何有限区间 $[t_1, t_2]$ 上，$x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$. 还有 2）各阶导数满足同样的条件：在长度有限的任何闭区间上，对任意正整数 h，$x_n^{(h)}(t)$ 一致收敛于 $x^{(h)}(t)$（注意，导数的收敛蕴涵函数的收敛，反之未必）.

利用这种收敛的定义，可以引入一族无限多个半范数，从

而在 E 上确定一拓扑结构.

令 K 是有限长的区间 $[t_1, t_2]$，即 R 的一个紧致集. 用 D 表示随便哪一阶导数的符号; D 是一族算子:

$$x \to x^{(h)} = Dx, \ \forall h.$$

我们定义关于 K 与 D 的半范数如下:

$$p_{K,D}(x) = \sup_{t \in K} |Dx(t)| \ (|Dx| \text{在} K \text{上的最大值}).$$

这里，参数 α 是一对参数 K, D. 这样定义的半范数的确满足半范数公理，而由此产生的收敛也满足所要的强收敛条件，因为:

$\forall K, \forall D, p_{K,D}(x_n - x_0)$ 趋于 $0 \Leftrightarrow \forall h, x_n^{(h)}(t)$ 在 K 上一致趋于 0.

还可以给出别的例子.

7. 局部凸的拓扑向量空间的重要性

历史梗概 数学理论之所以得到发展，是因为可以用来研究某些精密的科学问题. 我们刚才介绍的理论中有些定理威力极大，但为数不多. 这就说明这些定理的发现何以姗姗来迟(1920 年左右).

巴拿赫开头只考虑一个范数; 巴拿赫空间就是指完备赋范空间(这就是说，这个空间中所有的柯西序列都收敛). 1930 年左右所知道的那些重要定理，虽然只有五、六个，但却适用于许许多多不同的情况. 不过 25 年，人们终于能够选出了那些好的公理，即是在那些有用的例子里成立的公理，并且把适用于这些例子的定理收集起来. 巴拿赫的著作(«Théorie des Opérations Linéaires», Varsovie, 1932)标志着一个阶段的开始，只是在十五年以后才告终了，那是为了需要使这一理论

能够兼收并蓄，研究更一般的集合，例如必须包容具有无限多个半范数的无限可微的许瓦兹空间. J. 丢东涅的一篇文章(见 Annales de l'E. N. S., 1940)重新考虑了巴拿赫的问题，引进了空间是局部凸的假设，从而可以得到一些定理，即使就巴拿赫研究过的情形而言，这些定理也比巴拿赫得到的结果要广（这是指 G. W. Mackey, J. Dieudonné, L. Schwartz 关于分布理论的工作）. 最后，Grothendieck 应该看成是巴拿赫的真正接班人，因为他得到的那些结果非常重要.

有一些理论如果不从应用着眼就无法建立，也不可能发扬光大，局部凸空间的理论可以称得上是其中的典型.

8. 简要介绍几个定理

汉恩-巴拿赫定理 这个定理引人注目，就连不是这方面的专家也深信这一理论的重要. 我们不介绍它的证明了，这要用到超限归纳法与策墨诺公理.

准备 把一个拓扑向量空间映成另一个拓扑向量空间的连续线性映射.

把一个拓扑向量空间 E 映成另一个拓扑向量空间 F 的线性映射中，我们考虑关于 E 与 F 的拓扑结构是连续的那些映射. 这类映射在许多场合是极重要的，例如在许瓦兹空间中，由导数定义的映射 $x(t)\to x^{(h)}(t)$ 是线性的，并关于给定的收敛连续. 同样，物理学中所有的微分算子都是有关函数空间的连续线性算子，尽管或多或少是容易定义的. 积分算子亦然.

一个基本的特例是把拓扑向量空间 E 映入实数集 R 的

连续线性映射 $x(t)\to u(x)\in R$，使得

$$u(x+y)=u(x)+u(y)$$

对 x 与 y 连续，

$$u(\lambda x)=\lambda u(x)$$

对 λ 与 x 连续.

例子　设 E 是[0, 1]上的连续数值函数 $x(t)$ 的集合；在区间[0, 1]上取定一数 t_0. 映射 $x(t)\to x(t_0)$ 对每个函数给出它在 t_0 处的值，这个映射是连续线性映射.

同样，对同一个 E，映射 $x(t)\to\int_0^1 x(t)dt$ 是线性的，根据中值定理也是连续的.

更一般，设 $f(t)$ 是一来就取定了的数值连续函数，则映射 $x(t)\to\int_0^1 x(t)f(t)dt$ 是连续线性映射.

同样的，如果与 $x(t)$ 相应的值是勒贝格-斯蒂尔吉斯积分，即 $x(t)\to\int_0^1 x(t)d\mu(t)$，这里 $\mu(t)$ 是有界变差函数，则映射也是连续线性的. 此外，同这些积分有关的那些定理及其逆定理使它们得到了现代的定义，即是定义为连续函数集合上的线性形式，对于一致收敛拓扑结构是连续的.

局部凸拓扑向量空间的汉恩-巴拿赫定理

这个定理断定了这种空间上存在连续线性形式，并明确提出确定这些形式的条件.

设 F 是 E 的向量子空间（即是对于加法运算以及用实数相乘的运算保持不变的子集合）. 因为 E 上存在拓扑结构，故可定义 F 在 E 中的闭包（或附贴包）$\bar{F}$. 说明了这一点，就可以提出巴拿赫的下面这一条断言了：

给了闭向量子空间 F 和不在 F 中的一点 p，则 E 上存

在一个连续线性形式，在集合 $\bar{F}$ 的每一点 x 处为零，而在 p 处不为零。

显然，若连续映射 $u(x)$ 在 F 上为零，则在 $\bar{F}$ 上也为零，因为 $\bar{F}$ 的点是 F 的点的极限，但不能由此推断 $\bar{F}$ 以外的任何情况。定理的目的就是说明 $u(x)$ 的存在。

第八讲　维数的概念

H. Cartan　(索尔本大学教授)

1. n 维流形

n"维"空间最著名的例子是数值空间(即"欧氏空间")R^n，它的点是 n 元实数组 $(x_1, \cdots, x_n)$. R^n 的每一张超平面，即线性方程(不必齐次) $f(x)=0$ 所确定的集合 H，将空间 R^n 分成两个半空间，分别由 $f(x)>0$ 与 $f(x)<0$ 确定；又，任意给定两个不同的点 x 与 y，总存在超平面 H，将 x 与 y "分开"，即是 x 属于 H 所确定的一个半空间，而 y 属于另一个半空间. 注意，H 同胚[注] 于空间 R^{n-1} 所以是 $n-1$"维"的.

从空间 R^n 出发，还可以造出另外一些空间，看来自然也应该叫做 n"维"空间. 例如，设 S_n 是空间 R^{n+1} 中由方程 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$ 确定的球面，这是一个有界闭子空间，所以是紧致空间；此外，球面投影在挖掉一点的 S_n 与空间 R^n 之间确立一同胚映射，所以 S_n 的每一点都有一个开邻域同胚于 R^n.

再考虑(实)射影空间 P_n 它的点由 $n+1$ 个不全为零的齐次坐标 $Z_0, \cdots, Z_n$ 确定，我们规定：两组成比例的齐次坐标确定射影空间 P_n 的同一点；老实说，为了完全确定 P_n，必须确切说明 P_n 的拓扑结构如何，不过我们不详述了. P_n 中

[注]　两个拓扑空间同胚是指其间存在一个同胚映射，即一个一一对应，使得开子集互相对应；也可以说，这个一一对应关系确定的把一个空间映成另一个空间的映射是双连续的。

使得坐标 Z_i 为零的点组成的集合 H_i 是一个闭子集，同胚于 P_{n-1}; 子集 H_0 就是常说的“无穷远超平面”. H_i 的补集 U_i 是 P_n 的开集，同胚于 R^n(例如，U_0 是 P_n 中所谓处于“有限距离”的点集)；U_i 的点可以表为 n 个实数，即下面的商数：

$$Z_0/Z_i, \cdots, Z_{i-1}/Z_i, Z_{i+1}/Z_i, \cdots, Z_n/Z_i.$$

因此，P_n 是 $n+1$ 个开集的并集，其中每一个开集都同胚于 R^n.

一般，所谓 n 维流形，是指一个拓扑空间 V，满足豪斯道夫(Hausdorff)隔离公理(即：对每一对不同的点 x, y, 存在 x 的一个邻域与 y 的一个邻域，没有公共点)，而且具有下列性质：V 的每个点都有一个开邻域同胚于空间 R^n. 如上所见，R^n 本身，S_n, P_n 都是 n 维流形.

问题 一个 n 维流形 V 与一个 m 维流形 W，当 $n\neq m$ 时，是否可能同胚？如果可能，那么流形的“维数”这个概念就没有任何拓扑涵意. 幸好，这是不可能的；不过其证明极难.

让我们更仔细地分析这个问题. 整个问题就是说：当 $n\neq m$ 时，R^n 的开集 U 与 R^m 的开集 U' 之间是否存在同胚映射？(不言而喻，U 与 U' 假定非空). 假设存在，则有把 U 映成 U' 的连续映射 f，以及把 U' 映成 U 的连续映射 g，使得复合映射 $g\circ f$ 是 U 的恒等映射，$f\circ g$ 是 U' 的恒等映射. 若再假设 f 与 g 有连续偏导数，我们就可以证明这种同胚是不可能的：U' 中点的坐标 y_j 是 U 中点的坐标 x_i 的连续可微函数 f_j:

$$y_j=f_j(x_1, \cdots, x_n);$$

同样，

$$x_i=g_i(y_1, \cdots, y_m).$$

对上面两式微分得

$$dy_j=\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i, \quad dx_i=\sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}dy_j.$$

以 $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ 为元素的矩阵, 在每一点 $x\in U$, 定义了把 R^n 映入 R^m 的一个线性映射; 以 $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$ 为元素的矩阵在对应点 $y=f(x)$ 处定义了把 R^m 映入 R^n 的一个线性映射. 注意, $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 是恒等映射, 复合函数的导数定理表明: 上述两个矩阵的积(次序任意)是单位矩阵. 换言之, 若 $x\in U$, $y=f(x)$, 则有两个线性映射, 一个把 R^n 映入 R^m 另一个把 R^m 映入 R^n, 它们彼此互为逆映射; 这表明, R^m 与 R^n 作为向量空间是同构的, 但是代数学上的一条定理断言: R^n 中一组基底所含向量的个数 n 应等于 R^m 中一组基底所含向量的个数 m, 此与假设 $n\neq m$ 不合.

我们刚才就连续可微的同胚映射证明了维数的不变性; 为此, 利用了向量空间"维数"的不变性, 这里"维数"一词是就纯代数的意义而言(基底向量的个数).

要就任意同胚映射(不必可微)来证明 R^n 的维数不变性则困难得多. 第一个证明(1911 年)属于布劳韦尔(Brouwer). 现在谈不上转引他的证明, 也谈不上介绍证明的思路. 他的证明基于单纯逼近的概念, 与"同调"的概念密切相关(参见本书最末一篇 L. 许瓦兹(Schwartz)的讲演).

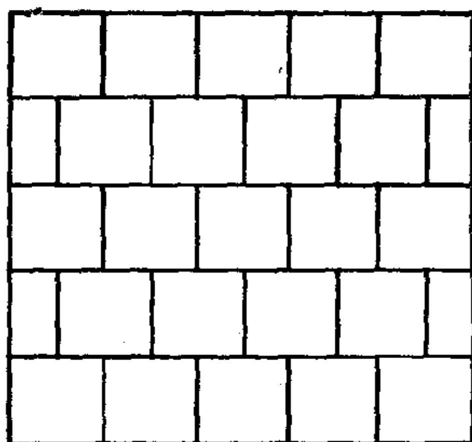


图 1

维数不变性的另一证明基于勒贝格(Lebesgue)的一个创造性思想[注], 也与同调有关. 考

【注】 有人说勒贝格在瓦兹(Oise)省古维欧这个小乡村的住宅里修了一堵砖墙, 才想出了这样来说明维数的特性。

虑 n 维方体 I^n 即线段 $I=[0, 1]$ 自身的 n 次乘积. 我们用一些闭集合把它铺满 ($n=2$ 的情形见图 1), 使得方体的每一点至多属于 $n+1$ 个这样的集合; 利用直径任意小的集合, 这总是可能的. 此外, 我们能证明, 对于 I^n 的由充分小的闭集作成的任何覆盖, 至少总有方体的一点, 此点至少属于该覆盖的 $n+1$ 个集合. 因此, 数 n 说明空间 I^n 的一个纯拓扑性质, 由此容易推出, 只要 $m\neq n$ 则不可能存在同胚映射, 把 R^n 的开集映成 R^m 的开集. 下面是勒贝格定理的确切陈述: 若 I^n 由诸闭集 F_i 覆盖, 使得每一 F_i 决不同时与方体的两个相对面相交, 则 I^n 中有一点, 同时属于 $n+1$ 个 F_i.

2. 一种维数论的公理

我们但愿能谈谈比上面讨论过的更一般的空间的维数, 例如, 考虑 R^n 的一个子空间 A, 为确定计设为闭子空间: 我们能否对这样的空间定义一个维数, 使得它是拓扑不变的? 因此, 把 A 换成 R^m 的子空间 B, 只要 B 与 A 同胚, 则 A 与 B 的维数一样.

在维数论中, 我们应首先明确要定义维数的那一类拓扑空间 C(维数是一个整数, 可能为零或无限). 假定类 C 中只含有满足豪斯道夫隔离公理的空间, 并包含所有的多面体. 先说明一下所谓的多面体, 为此要从 p 维单形讲起. 在 R^n 中取 $p+1$ 个点 $x_i(i=0, \cdots, p)$, 使得维数 $<p$ 的任何平面不可能包含所有这些点(当 $n\geqslant p$ 时, 总是可能的), 这些质点(质量可为0)的重心[注1]的轨迹是包含这些点的最小凸集, 我们将这样

的 $p+1$ 个点的点组 $(x_0, x_1, \cdots, x_p)$ 称为以 $x_0, \cdots, x_p$ 为顶点的 p 维单形，它的每一点可唯一地表成 $\sum_i \lambda_i x_i$ 诸实数 $\lambda_i \geqslant 0$，满足 $\sum_i \lambda_i = 1$。具有同一维数 p 的两个单形同胚：$p=0$ 时是一个点，$p=1$ 时是一条线段，$p=2$ 时是一个三角形，$p=3$ 时是一个四面体[注2]。于是，多面体是一个空间，可以被有限多个闭子空间所覆盖，这些闭子空间都与单形同胚(单形的维数可能不同)，并且规则相处：覆盖中任两个单形的交是这两个单形的"面"(p 维单形的面是该单形的某些顶点的重心轨迹，这是一些维数为 0, 1, …, 或 $p-1$ 的单形)。

现在回到类 C：我们要求它包含所有的多面体，此外还满足下述条件：与类 C 中某个空间 X 的闭子空间同胚的任何空间仍在 C 内。这样的类是相当广泛的，它包含了多面体的所有闭子空间。

类 C 的例子 1) 紧致空间类 C_1(空间 X 是紧致的，如

[注1] 假设在点 x_i 处有质量 $m_i \geqslant 0$ $(i=0, 1, \cdots, p)$，$\sum_i m_i \neq 0$，则这 $p+1$ 个质点的重心是

$$x = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \sum_i \frac{m_i}{\sum_j m_j} x_i, \quad \lambda_i = \frac{m_i}{\sum_j m_j}$$

称为这个质点系的重心坐标，合于 $\lambda_i \geqslant 0$，$\sum_i \lambda_i = 1$。因此，这些点所能构成的一切质点系的重心轨迹是包含这 $p+1$ 个点的最小凸集。——译者注

[注2] 这一段自此以下叙述不太清楚，改述如下：R^n 中的 p 维单形的同胚像称为 p 维拓扑单形，于是，多面体是一个拓扑空间，可以"剖分"为有限多个拓扑单形(维数可以各不相同)，这些拓扑单形规则相处，即是任何两个拓扑单形的交要么是空集，要么是它们的公共"面"(p 维单形的面是指它的顶点子集构成的质点系的重心轨迹，所以是维数为 0, 1, …, 或 $p-1$ 的单形；这些面的同胚像就是相应拓扑单形的面)。——译者注

果它满足豪斯道夫公理，并且有波莱尔(Borel)-勒贝格性质：对于 X 的每一由开集族 $\{U_i\}$ 组成的覆盖，存在有限多个 U_i 覆盖 X)。

2) 局部紧致空间类 C_2(X 是局部紧致空间，如果它满足豪斯道夫公理，并且每一点至少有一个紧致邻域)。空间 R^n 属于类 C_2，但不属于类 C_1。

3) 可数型可尺化空间类 C_3，特别是对任何 n，这一类中含有 R^n 的所有子空间。空间 X 叫做可尺化的，如果 X 的拓扑结构可用距离定义，或者，更确切地说，用"尺度"定义。一个尺度对于任何两点 x, y 相应地给出一个数 $d(x, y)\geqslant 0$，使得：

$$d(x, y)=0 \text{ 的充要条件是 } x=y;$$

$$d(x, y)=d(y, x);$$

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)\text{ (三角形不等式)}.$$

这种可尺化的空间 X 是"可数型的"，如果 X 中存在可数处处稠密集 $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$(即 X 的每一非空开集至少含其中一点)。空间 R^n 属于 C_3：因为坐标为有理数的点构成可数处处稠密集，可以证明 C_3 类中的空间 X 的每一子空间 A 属于 C_3，即使 A 不是 X 的闭集。

4) 正规空间类 C_4：空间 X 是正规的，如果它满足豪斯道夫公理，并且只要 A 与 B 是不相交的闭子集，就存在 X 上的数值连续函数，在 A 上为 0，在 B 上为 1。正规空间的每一闭子空间仍是正规的。

我们指出，每个紧致空间是正规的(换言之，C_4 包含 C_1)；每个可尺化的空间是正规的(故 C_4 包含 C_3)。

对于上述各类空间，都有一种维数理论。推而广之，对于维数论应该提出什么要求呢？我们假定，对于所考虑的类 C

的每一空间 X，都相应地有一整数 $\dim X$，称为 X 的维数，满足下列条件：

(I) $\dim X \geqslant -1$；$\dim X$ 可以是无穷大；$\dim X \geqslant 0$ 的充要条件是 X 非空；

(II) 若 X 与 X' 同胚，则 $\dim X = \dim X'$；

(III) 若 A 是 X 的闭子空间，则 $\dim A \leqslant \dim X$；

(IV) 若 X 是两个闭子空间 A_1 与 A_2 的并集，则

$$\dim X = \sup(\dim A_1, \dim A_2);$$

(IV′) (不必作为公理)若 X 是可数多个闭子空间 A_i 的并集，则

$$\dim X = \sup(\dim A_i);$$

(V) 方体 I^n 的维数是 n.

因此，若 R^n 在类 C 中，则 R^n 的维数是 n：事实上，由(III)，$\dim R^n \geqslant \dim I^n$，故由(V)，$\dim R^n \geqslant n$；另一方面，$R^n$ 是可数多个闭方体的并集，故 $\dim R^n \leqslant n$(根据 IV′).

注 必须避免提出下述公理："若 f 是把 X 映入 Y 的连续映射，则像 $f(x)$ 的维数至多等于 $\dim X$". 事实上，"皮亚诺 (Peano) 曲线"是把线段 I 映成正方形 I^2 的连续映射，所以这个条件与公理 (V) 矛盾. (关于皮亚诺曲线见附录.)

除上述公理外，还有一个性质迥异的公理. 先引入一个概念：给了空间 X 的两个不相交的闭子集 A 与 B，我们说，闭子集 C 把 A 与 B 隔开，如果 $X-C$ 是两个分别包含 A 与 B 的不相交的开集的并集. 新公理如下：

公理 (A)：若空间 X 中两个不相交的闭子集总可以被一个维数 $\leqslant n-1$ 的闭子空间隔开，则 $\dim X \leqslant n$.

3. 门格-乌里松定理

我们取可数型可尺化空间类 C_3 作类 C，并且不仅要求公理(A)，还要求其逆：若 $\dim X \leqslant n$，则 X 的两个不相交的闭子集总可以被一个维数 $\leqslant n-1$ 的闭子空间隔开．这个加强了的公理与公理(I)完全确定了维数．确切地讲，用关于 n 的归纳法，定义什么是维数 $\leqslant n$ 的空间 X，按定义，这就是指 X 的任意两个不相交的闭子集都可以被一个维数 $\leqslant n-1$ 的闭子空间隔开．因为根据公理(I)已经知道了维数 $\leqslant -1$ 的空间(即唯一存在的空集空间)，从而依次得到维数 $\leqslant 0$ 的空间，维数 $\leqslant 1$ 的空间等等的定义．于是空间 X 的维数等于满足 $\dim X \leqslant n$ 的最小整数 n；如果不存在这样的整数 n，就说空间 X 的维数是无穷大．

这样定义的维数，不曾考虑到条件(II)至(V)．事实上，它们都起作用(包括(IV′)在内)，现在是一些定理了；为证明它们(往往很难)，要用到空间 X 是可数型可尺化空间这个事实．还有，公理(III)对于 X 的任何子空间 A 即使是非闭子空间都成立．

有关这种维数论的问题，读者可参考胡奈维奇(Hurewicz)-瓦尔曼(Wallman)的著作(«Dimension Theory», Princeton, 1941)，或者法瓦德(Favard)的小册子(«Espace et Dimension», Albin Michel, 1950)．

对于 C_3 类，如果有另一套维数论，则空间 X 按照这套新理论的维数至多等于它按照门格-乌里松理论的维数：证明用公理(A)与归纳法．

应该阐明零维空间是什么．我们指出，X 是 0 维空间的

充要条件是：X 的每个点都具有基本邻域组，使得邻域的边界[注]是空集．然而，边界是空集的集合不过就是既开又闭的集合，0 维空间的例子：设 D 是区间 I 的无理点所成的子空间，D 是 0 维空间，因为 D 的每一点 x 都有一族既开又闭的基本邻域，即区间 I 中含有 x 且具有有理端点的那些子区间与 D 的交．存在由无限多点构成的 0 维紧致空间：例如，由数字 0，1 构成的无限排列的空间 E，其拓扑结构的定义是：$S_1, \cdots, S_k, \cdots$ 这些排列以排列 S 为极限的充要条件是：对于每一整数 n 存在一整数 $k(n)$，使得 $k>k(n)$ 时，排列 S_k 与 S 中头 n 个数字都相同．这个空间 E 是紧致的，维数是 0（头 n 个数字相同的所有排列构成 E 中既开又闭的集合）．存在一个连续映射 f，把这个空间 E 映成区间 $I=[0, 1]$：对于 0 与 1 组成的任何排列 $(a_1, \cdots, a_k, \cdots)$，$f$ 相应地给出实数 $\sum_k \frac{a_k}{2^k}$（此级数收敛），这个数以所给排列为其二进位表示，除非从某位开始数字都是 1；在这种情形下，例如 0101111… 这个排列所确定的数等于排列 0110000… 所确定的数．因此把 E 映成 I 的这个连续映射 f 不是一一的．

4．亚力山大诺夫-捷赫理论

这种理论是对勒贝格的思想（见上面的 2）加以适当修改

[注] 对于拓扑空间 X 的一个子集 A，可以相应地得到下面两个集：付贴包（或闭包）$\overline{A}$，这是包含 A 的最小闭集；内部 $\mathring{A}$，这是含于 A 中的最大开集．差集 $\overline{A}-\mathring{A}$ 称为 A 的边界，这是一个闭集，也是 A 的补集的边界．A 的边界是空集，就是指 $\mathring{A}=\overline{A}$，也就是说 A 既是开集又是闭集．

建立起来的．我们取正规空间类C_4为类C．给了空间X的一个覆盖，由有限个开集U_i组成，我们说这覆盖有维数$\leqslant n$，如果X的每一点至多属于覆盖的$n+1$个集合．另一方面，我们说，开集V_j组成的覆盖比开集U_i组成的覆盖更细，如果每个V_j至少含于一个U_i中．在亚力山大诺夫-捷赫的理论中，有如下定义：

正规空间X有维数$\leqslant n$，如果对X的每一个由有限多个开集组成的覆盖，存在一个更细的覆盖，也由有限多个开集组成，并且维数$\leqslant n$.

我们指出，这样定义的维数满足公理(I)到(V)（可能除去(IV′)），以及公理(A)．

已经说过，类C_4包括类C_3．值得注意的是，在类C_3上，亚历山大诺夫-捷赫意义下的维数等于门格-乌里松意义下的维数．

另一方面，类C_4包括紧致空间类C_1，因此亚历山大诺夫-捷赫的理论也就产生了紧致空间的维数论（门格-乌里松的理论只给出了可尺度化的紧空间的维数）．紧致空间的这种维数理论满足前述所有公理，包括(IV′)．

现在我们要给出紧致空间维数的另一特征．有一类紧致空间，即多面体，其维数是明显的．事实上，根据公理(I)到(V)，一个多面体的维数显然是拼成该多面体的诸单形的最大维数．这表明紧致空间维数的概念可归结为多面体维数的概念．为简便计，假设所考虑的紧致空间X的拓扑结构由距离确定；依定义，把X映入一多面体P的连续映射是ε映射，如果P的每一点的逆像是X中直径$\leqslant\varepsilon$的集合（这里ε表示一个正数）．我们指出下列定理：紧致空间X有维数$\leqslant n$，必须且只需对于每一$\varepsilon>0$，存在维数$\leqslant n$的多面体P以

及把 X 映入 P 的 ε 映射.

下面是这个准则的一个应用. 几乎显然: 两个多面体 P 与 Q 的积能剖分成单形, 如此剖分后的 $P\times Q$ 的维数是 P 与 Q 维数的和, 由此推出, 若 X 与 Y 是两个紧致空间, 则有:

$$\dim(X\times Y)\leqslant\dim X+\dim Y. \tag{1}$$

遗憾的是, 等式不总是成立: 邦特列雅金在 1930 年给出一例, 两个维数为 2 的紧致空间, 其积的维数是 3.

不等式(1)在亚历山大诺夫-捷赫的理论中也真. 事实上, 若 X 与 Y 属于类 C_4 则可将它们扩张成紧致空间 $\widetilde{X}$ 与 $\widetilde{Y}$, 使得 $\dim\widetilde{X}=\dim X$, $\dim\widetilde{Y}=\dim Y$, 于是 $X\times Y$ 扩张成 $\widetilde{X}\times\widetilde{Y}$, 并有

$$\dim(X\times Y)\leqslant\dim(\widetilde{X}\times\widetilde{Y})\leqslant\dim\widetilde{X}+\dim\widetilde{Y}$$
$$=\dim X+\dim Y,$$

这就证明了(1).

5. 局部紧致空间的维数

在这一理论中, 我们将局部紧致空间 X 的维数定义成 X 的紧致子空间维数的上确界 (紧致空间的维数如本讲第 4 节所定义). 于是得到了类 C_2 的维数理论, 它满足(I)至(V)的所有公理(包括(IV′)) 也满足公理(A)与关系(1).

因此, 我们实际上有两种维数理论: 一种是空间类 C_3 的维数论(见本讲第 3 节), 现在这种是局部紧致空间类 C_2 的维数论. 使人愉快的是: 在公共类$C_3\cap C_2$上, 两种理论一致: 若一局部紧致空间X属于类 C_3 (为此, 必须且只需 X 是可数多个可尺度化的紧致子空间的并集), 则 X 在门格-乌里松意义下的维数正好等于 X 中紧致子空间维数的上确界, 这是因为门

格-乌里松的维数满足公理(IV′).

上述两种理论中,维数的概念都有一种局部特征: $\dim X \leqslant n$ 的充要条件是: 每一点都有一个闭邻域,其维数$\leqslant n$.

6. 空间 R^n 的子空间

设 X 是 R^n 的子空间, 故 X 属于类 C_3. 若 X 包含 R^n 的一个非空开集,则显然 $\dim X=n$. 其逆亦真: 若 X 是 R^n 的子空间,维数恰为 n,则 X 包含 R^n 的一个非空开集. 在 X 是紧致子空间的特别情形下, 这一点是容易理解的: 事实上, 假设 X 没有内点, 取多面体 $P\subset R^n$, 它包含 X 并且由直径 $\leqslant \varepsilon$ 的单形组成. 在 P 的每个 n 维单形内部选取一点不属于 X, 从这点把 X 在这个单形中的那部分投影到单形的边界上,对于 P 的所有 n 维单形如法炮制,便得一个连续映射, 把 X 映入 P 中维数$\leqslant n-1$ 的那些单形的并集 P', 这是一个 ε 映射, 把 X 映入一个维数$\leqslant n-1$ 的多面体, 所以 $\dim X\leqslant n-1$.

紧致空间是些什么样的空间呢? 紧致空间可以实现为欧氏空间 R^q 的闭子空间(因而也可以实现为方体 I^q 的子空间). 这样的空间显然应是可尺化度的. 其逆定理亦真(门格-诺贝宁): 若 X 是 n 维可尺化的紧致空间, 那么 X 可以实现为 $2n+1$ 维方体 I^{2n+1} 的闭子空间. 但是, 的确有一些 n 维可尺度化的紧致空间, 不能实现为方体 I^{2n} 的子空间 (例如, $2n+2$ 维单形的诸 n 维面的并集).

7. 映入球面 S_n 的映射

设 X 是紧致空间, A 是 X 的闭子空间; 把 A 映入空间

R^n 的每一连续映射可扩张成把整个 X 映入 R^n 的连续映射（当 X 为正规时也真）．但是，如果考虑映入球面 S_n 的映射，则结论不真：例如，设 B_{n+1} 是 $n+1$ 维球体，即 R^{n+1} 中到原点的距离 $\leqslant 1$ 的点集（S_n 是 B_{n+1} 的边界），f 是 S_n 的恒等映射，则可证明，f 不能扩张成把 B_{n+1} 映入 S_n 的连续映射．

紧致空间的维数有如下特性：$\dim X \leqslant n$ 的充要条件是：对任意闭子空间 $A \subset X$ 把 A 映入 S_n 的连续映射 f，可以扩张成把 X 映入 S_n 的连续映射．

对于门格-乌里松的维数（如果 X 是可数型可尺度化空间），上述性质也成立．

由此推出下述性质：若 Y 是局部紧致空间 X 的闭子空间，则有

$$\dim X \leqslant \sup(\dim Y,\ \dim(X-Y)). \tag{2}$$

事实上，在门格-乌里松理论中也有上面的不等式，因为这时开集 $X-Y$ 是可数多个闭集的并集．

8. 补子空间

空间 X 叫做连通的，如果它不是两个不相交的非空开子集的并集．如果从连通空间 X 中除去一闭子集 A，则补空间 $X-A$ 可能不连通（例如：X 是空间 R^n，A 是超平面），然而，我们指出，若 X 是 n 维连通流形，A 是维数 $\leqslant n-2$ 的闭子空间，则空间 $X-A$ 连通（例如，除去一点的平面是连通的），当 A 为 $n-1$ 维时，确切地讲，A 作为拓扑空间是 $n-1$ 维流形时，结果又如何呢？我们不加证明地提出一般的约当-布劳韦尔定理：设 X 是 n 维“可定向”流形，连通而且“单连通”（这就是说，每条闭曲线可形变为一点），若一个 $n-1$ 维流形（不能

是否连通)嵌入 X 成为闭子空间 A, 则 $X-A$ 的连通区的个数等于 A 的连通区个数加 1; 此外, A 的每一连通区必是"可定向的". 这个定理特别适用于 X 是空间 R^n 的情形.

9. 与 k 维测度的关系

设 X 是可数型可尺化空间, 在 X 上确定了一尺度, 于是, 对每个整数 n, 令 $m_n(X)=\inf\limits_{(X_i)}\sum\limits_i d(X_i)^n$, 这里诸 X_i 组成 X 的可数覆盖, 对所有这种覆盖求下确界, $d(X_i)$ 表示按已知尺度算出的 X_i 的"直径"; 当 X 紧致时, 可以只考虑有限覆盖. 我们指出: 若 $m_{n+1}(X)=0$, 则 $\dim X\leqslant n$. 有一个类似于逆定理的结果: 若 $\dim X\leqslant n$, 则 X 上存在一个尺度, 使得 $m_{n+1}(X)=0$; 还可以把 X 实现为 I^{2n+1} 的子空间, 使得方体的尺度产生的 X 的尺度就合乎要求.

例如, 取区间 I 作为 X, 这是 1 维空间, 区间内两点间的通常距离作为尺度. 显然, I 可以被有限多个区间覆盖, 这些区间长度的平方和可以任意小.

结论 我们希望, 上面这个硬性压缩的概述能够使读者对拓扑学中与"维数"概念有关的种种问题有所了解.

附录: 皮亚诺曲线

考虑等腰直角三角形 T, 设 S_0 与 S_1 是两锐角的顶点. 我们来定义一个连续映射 g, 把区间 $I=[0, 1]$ 映成 T, 使得 $g(0)=S_0$, $g(1)=S_1$. 将这样得到的"曲线"再添上关于 T 的斜边的对称图形, 我们就得到一条填满正方形的"曲线".

为此, 再考虑本讲第 3 节定义的空间 E. 现在定义把 E

映成 T 的连续映射 h. T 的直角平分线将 T 分成两个(闭)三角形 T_0 与 T_1, T_0 含有顶点 S_0, T_1 含有顶点 S_1. 同样, T_0 是两个相等三角形 T_{00} 与 T_{01} 的并, T_1 是两个三角形 T_{10} 与 T_{11} 的并, 这里 T_{00} 是含有 S_0 的三角形, T_{01} 是含有 T 的直角顶点的三角形, 同样, T_{10} 含有 T 的直角顶点, T_{11} 含有 S_1. 重复这个过程, 把三角形 T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{11} 的每一个又各分成两个相等的三角形, 用 T_{000}, T_{001} 表示 T_{00} 所分成的两个三角形, 等等. 确切地讲, 诸三角形的编号使得序列

$$T_{000},\ T_{001},\ T_{010},\ T_{011},\ T_{100},\ T_{101},\ T_{110},\ T_{111}$$

中, 相继的两个三角形恒有一条公共边(图 2). 如此继续下去; 对于每个整数 n, 三角形 T 被分成 2^n 个相等的三角形, 其中每一个对应于由 0 或 1 组成的 n 个数的排列.

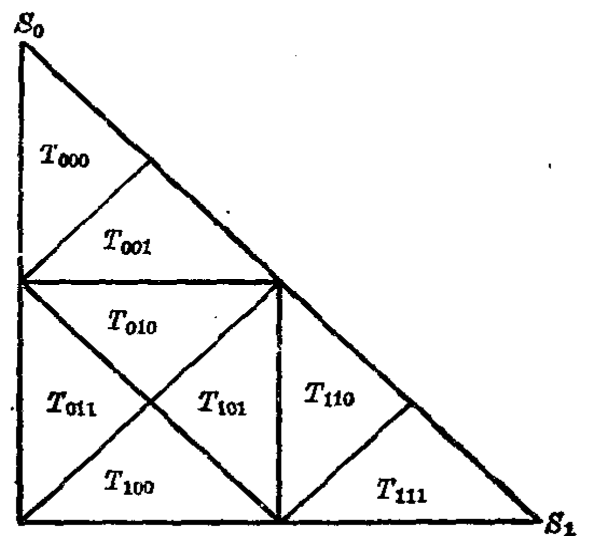


图 2

现在考虑空间 E 的一点, 即数字 0 或 1 的一个无限排列, 例如, 0010111…; 对于这个排列, 我们相应地得到三角形的无限序列:

$$T_0,\ T_{00},\ T_{001},\ T_{0010},\ T_{00101},\ T_{001011},\ T_{0010111},\ \cdots$$

其中每一个都包含下一个, 它们的直径趋于零, 所以有唯一的公共点. 若用 $h(x)$ 表示这一公共点, 就定义了一个把 E 映入 T 的映射 h, 可验明 h 连续. 因为 T 的每一点至少属于三角形套的无限序列, 故 h 把 E 映成 T. 然而, § 3 曾定义了把 E 映成区间 $I=[0, 1]$ 的连续映射 f; 另一方面, 若两个无限排列(例如 $x=0101111\cdots$ 与 $y=0110000\cdots$) 使得 $f(x)=f(y)$,

则易证 $h(x)=h(y)$，即确定 T 的同一点．若对每一点 $u\in I$，选取一 $x\in E$，使得 $f(x)=u$，则元素 $h(x)\in T$ 与 x 的选取无关，记为 $g(u)$，由此得到把 I 映成 T 的映射 g，g 是连续的，因为它把区间 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 映成 T_0，把区间 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ 映成 T_1，把 $\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$ 映成 T_{00}，等等．这映射 g 正是要求的"皮亚诺曲线"．

注意，对于任何一点 $t\in T$，至多存在 I 的四个点，被 g 映成 t；一般只有一个这样的点．

图 3 是皮亚诺曲线的近似（画出的三角形有六个数字的脚标）．

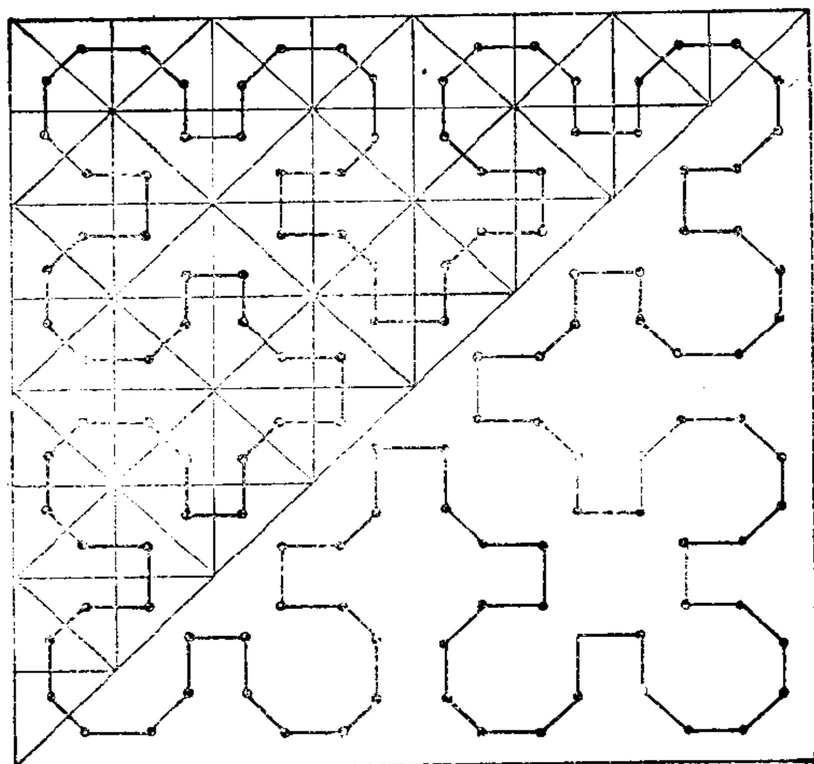


图 3

第九讲　覆叠与基本群

J. P. Serre（法兰西学院教授）

1. 引　　言

覆叠的概念可以按照几何问题中经常碰到的一种情况提出来；我们先讲几个例子：

a）设 Y 是圆柱体上的螺旋线（见图 1），用 p 表示把螺旋线 Y 映成圆柱体底圆 X 的投射算子：$Y \to X$. 这个映射是局部同胚映射：若 y 是 Y 的一点，$x=p(y)$ 是其投影，则在 y 的适当邻域（例如一小段弧）与 x 的适当邻域之间，p 定义了一个一一且双连续对应. 不言而喻，p 不是整体同胚映射，因为 Y 的相异点在 X 内可以有相同的像. 我们说 Y 是 X 的无限叶覆叠.

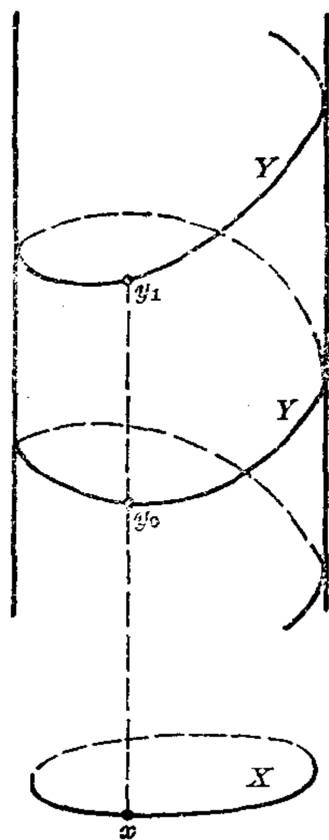


图　1

换一种提法，可以把上述覆叠叫做"角度"覆叠. 对于每个元素 $\alpha \in R$，相应地得到角 α 在圆周 S_1 上确定的点 $p(\alpha)$.

b）取空间 R^{n+1} 的球面 S_n 为 Y，即满足 $\sum x_i^2=1$ 的点 $(x_0, \cdots, x_n)$ 的集合；这时空间 X 是 n 维实射影空间，记为 P_n，投射 p: $Y \to X$ 对于点 $(x_0, \cdots, x_n) \in S_n$，相应地给出 P_n 中齐

次坐标为$(x_0, \cdots, x_n)$的点．这投射是把 Y 映成 X 的连续映射，X 的每一点都是 Y 的两个对径点的像．这是两叶覆叠的例子．

P_n 以 S_n 为覆叠这一事实可以用来研究 P_n 上的椭圆型非欧几何，相当于 S_n 中通常的几何结构（由 R^{n+1} 的尺度导出的几何结构）．

c) 取 $Y=S_3$，视为范数是 1 的四元数 $a+bi+cj+dk$ 的集合，四元素的乘法使 S_3 具有拓扑群的结构；此外，如 E. 嘉当所证，这是除 S_1 外唯一具有这种性质的球面．

我们把三维空间的点 $M=(x, y, z)$ 与"纯"四元素 $xi+yj+zk$ 等同．若 $q\in S_3$，令 $R_q(M)=qMq^{-1}$，这里的乘积是四元数代数中的积；立即可证，$R_q(M)$仍是纯四元数，故为 R^3 的一点．还有，$R_q(M)$的范数等于 M 的范数．因此，把 R^3 映入自身的线性变换 R_q 保持距离不变；若用 $SO(3)$表示三维空间的旋转群，那么 $q\to R_q$ 是一连续同态映射 $p: S_3\to SO(3)$．容易验明 p 是局部同胚，每个旋转 $R\in SO(3)$ 都由两个互逆的四元数产生．本例又是两叶覆叠，可以使对旋转群的研究化为对 S_3 的研究，一般说来，这样更为简单．

比较例子 b）与 c）可知：群 $SO(3)$ 与射影空间 P_3 同胚，这个结果可以直接由几何论证得到．

2．覆叠的定义

设 X 与 Y 是两个拓扑空间，$p: Y\to X$ 是把 Y 映成 X 的连续映射．我们说，Y 是 X 由投影 p 确定的覆叠，如果对于每个 $x\in X$，存在 X 的开集 U，含有 x，具有下列性质：

(R) U 在 Y 中的逆像 $p^{-1}(U)$是一些互不相交的开集

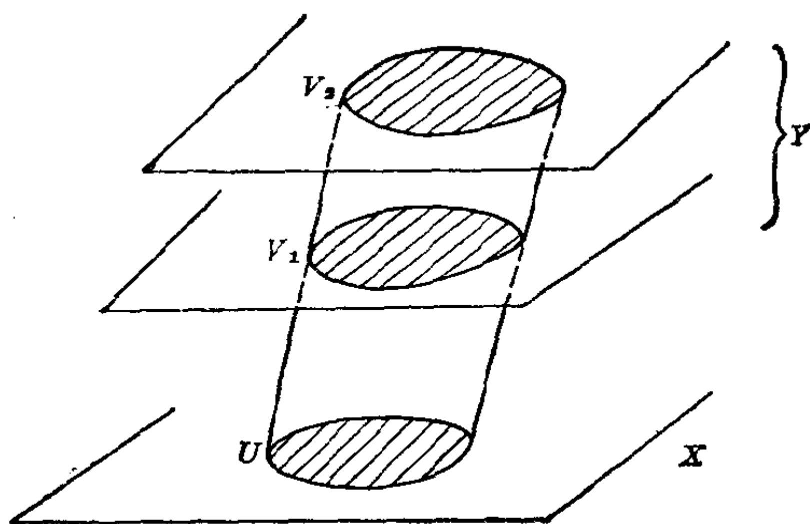


图 2

V_i 的并集，使得对于每个指数 i，投影 p: $V_i \to U$ 是把 V_i 映成 U 的同胚映射（见图 2）.

这个条件可以表达得更简单，只要我们先定义空间 X 的所谓简单覆叠：这是指积空间 $X \times E$，这里 E 是一个离散空间，映射 p: $X \times E \to X$ 不过是在第一个因子上的投影. 于是条件(R)可表达成：$P^{-1}(U)$ 同构于 U 的简单覆叠. 换言之，每个覆叠局部同构于简单覆叠.（注意，如果不假设 E 离散，那就得更一般的纤维空间的概念.）

不难验明，§1 诸例满足条件(R). 例 a) 中，只需取 U 为含有已知点 x 的任意圆弧. 例 b) 中，取 U 为 P_n 中挖掉一张不通过 x 的超平面后的点集.

3. 覆叠上的道路

覆叠的理论只有对空间 X 与 Y 作了“局部正则”的假设后才是令人满意的；假如把全不连通空间，例如康托完全集，取作空间 X，那会是荒唐可笑的. 我们不打算提出最少的假

设；今设（事实上这是过份限制了）X是拓扑流形．这就是说X是隔离空间，它的每一点都有与R^n的开集同胚的开邻域．再设X是连通的；这时，整数n是常数，即空间X的维数（参见H．嘉当的讲演）．由于条件（R），Y也是n维流形（但不必连通）．

直观上看，空间X与Y显然不能太不相同．它们是局部同构的（因此覆叠的概念也同微分几何有关），所以只有整体性质上的差异．我们可以设想，在空间X与Y中给出一个，看看有什么办法可以确定另一个．事实上，只要从X出发，便可找到简单的结论，这有赖于考虑X与Y上的道路．

按定义，拓扑空间X上的一条道路是一个连续映射f：$I\to X$，这里I表示区间$[0, 1]$．如果用x_t代替$f(t)$，那么一条道路就是X的一族点x_t，连续依赖于下标$t\in[0, 1]$．点x_0与x_1分别称为道路的起点与终点；一条闭合的道路（即$x_0=x_1$）称为（在点x_0的）闭路．因X连通，所以给了起点和终点，总有一条连结它们的道路．

Y上的一条道路y_t称为X上的一条道路x_t的提升，如果对每个$t\in I$有$p(y_t)=x_t$．这样的道路恒存在，确切地讲有：

若x_t是X上的一条道路，y_0是Y的一点，被投射成x_0，则Y上存在唯一一条道路以y_0为起点并且是x_t的提升．

事实上，先设覆叠结构$p: Y\to X$是简单的，即$Y=X\times E$，E离散，于是给定的y_0可以写成$y_0=(x_0, z)$，$z\in E$，所求的道路必为$y_t=(x_t, z)$，特殊情形得证．一般情形可归结为刚才的特例，只要注意我们可把区间$[0, 1]$分割成一些区间$[t_i, t_{i+1}]$，使得$t\in[t_i, t_{i+1}]$时，x_t含于一个开集U_i，而U_i有§2的性质（R），把刚才得到的结果应用到简单覆叠结构$p^{-1}(U_i)$

$\to U_i$，知：只要给了起点 y_{t_i}，则在 $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$ 时，存在唯一的 y_t. 由此一段一段地得到 y_t 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时的存在及唯一性.

注意，若 x_t 是闭路，则道路 y_t 的终点 y_1 被投射成 x_0；但一般没有 $y_0 = y_1$，换言之，一条闭路的提升未必是闭路（见图3）. 在例 a) 中，若取圆周本身（具有适当的参数表示）为闭路 x_t，则点 y_1 位于 y_0 的"上面一圈螺旋线"上. 在例 c) 中，若取绕 z 轴转 $2\pi t$ 的旋转为 x_t，则有 $y_t = \cos \pi t + k \sin \pi t$，由此 $y_0 = 1$，$y_1 = -1$. 这差不多就是覆叠结构的特性；为表明此点，需要基本群的概念，下节就来定义.

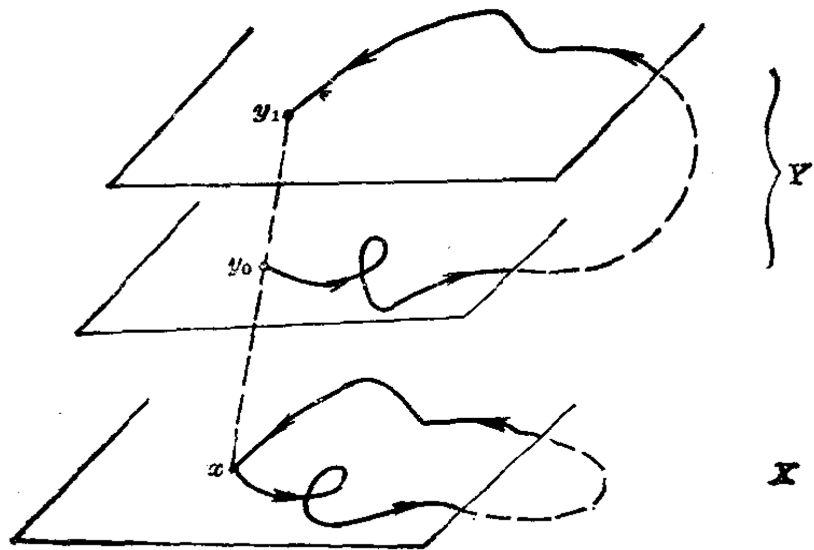


图 3

4. 同伦的道路·基本群

设 X 是拓扑空间，f 与 g 是 X 上的两条道路，有相同的起点 a 与终点 b. 我们说，f 与 g 同伦，如果存在 X 的一族道路 f_u，$0 \leqslant u \leqslant 1$，都以 a 为起点 b 为终点，使得 $f_0 = f$，$f_1 = g$，并且连续依赖于 u（即 $f_u(t)$ 是偶对 (u, t) 的连续函数）. 易见就具有已知起点与终点的道路而言，同伦是一等价关系，记成

$f \sim g$.

同伦关系当然适用于在定点 x_0 的闭路. 在闭路之间还有一个合成法则: 若 f 与 g 是两条闭路, 它们的积 $f*g$ 是一条闭路, 先走遍 f, 然后再走遍 g 而得. 当然应当精确说明所用的参数表示:

$$f*g(t)=\begin{cases} f(2t), & \text{若 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \text{若 } \dfrac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

容易验明, 这合成法则与同伦定义的等价关系是相容的, 换言之有:

$$f\sim f',\ g\sim g' \Rightarrow f*g\sim f'*g'.$$

因此, 在 x_0 的闭路(同伦)类的集合 $\pi_1(X, x_0)$ 中可以引进合成法则, 即是由 $f*g$ 求商而得, 从而 $\pi_1(X, x_0)$ 构成一个群, 因为:

i) 存在单位元素 e, 即常值闭路的同伦类: 对任何 t 有 $e(t)=x_0$.

应当验明: 对每条闭路 f, 我们有 $f\sim f*e$. 为此定义一族闭路 g_u, $0\leqslant u\leqslant 1$, 如下:

$$g_u(t)=\begin{cases} f((1+u)t), & \text{若 } 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{1+u}, \\ x_0, & \text{若 } \dfrac{1}{1+u}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

我们有 $g_0=f$, $g_1=f*e$, 由此 $f\sim f*e$. 同样可证 $f\sim e*f$.

ii) 对每条闭路 f, f 的同伦类有逆元素, 即是 $f'(t)=f(1-t)$ 确定的闭路 f' 的同伦类.

应当验明: $f*f'\sim e$. 为此, 定义一族闭路 h_u, $0\leqslant u\leqslant 1$, 如下:

$$h_u(t)=\begin{cases} f(2ut), & 若\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}, \\ f(2u(1-t)), & 若\ \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

我们有 $h_0=e$, $h_1=f*f'$, 由此 $f*f'\sim e$.

iii) $\pi_1(X, x_0)$的合成法则是结合的.

应当验明:若 f、g、h 是三条闭路,则有:

$$(f*g)*h\sim f*(g*h).$$

为此,定义一族闭路 k_u, $0\leqslant u\leqslant 1$,如下:

$$k_u(t)=\begin{cases} f(4t/(1+u)), \\ \quad 若\ 0\leqslant t\leqslant(1+u)/4, \\ g(4t-1-u), \\ \quad 若\ (1+u)/4\leqslant t\leqslant(2+u)/4, \\ h(1+4(t-1)/(2-u)), \\ \quad 若\ (2+u)/4\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

我们有 $k_0=(f*g)*h$, $k_1=f*(g*h)$. 由此得到所要的结果.

当 X 是弧连通空间时(连通流形就是如此), 可以证明, 诸群 $\pi_1(X, x)$, $x\in X$, 都同构. 于是可以写 $\pi_1(X)$ 代替 $\pi_1(X, x_0)$, 称为空间 X 的基本群(或者普昂卡雷群). 当 $\pi_1(x)=0$, 即每一闭路同伦于常值闭路时, X 叫做单连通空间.

(除 $\pi_1(X)$外,可定义群 $\pi_n(X)$, $n\geqslant 2$, 称为 X 的同伦群,与覆叠理论无关).

5. 底空间的覆叠空间的分类

继续§3的讨论, 设 Y 是拓扑流形 X 的覆叠空间. 已

经知道，X 上有同一终点的两条道路 x_t 与 x'_t 未必能提升成 Y 上有同样性质的道路；然而 x_t 与 x'_t 同伦时，确是如此．当这两条道路足够接近时，结论显然，而一般的情形，按照 § 3 所用的方法可以化为上述情形．

于是，设 x_0 是 X 中的定点，令 $E=p^{-1}(x_0)$ 是 Y 中被投射成 x_0 的点 y 的集合．若 $y\in E$, $f(t)=x_t$ 是 X 上在 x_0 处的闭路，则据前述，Y 上有唯一一条道路以 y 为起点，并且是道路 f 的提升，它的终点 y_1 只依赖于闭路 f 的同伦类 α，因此，可表成 $y*\alpha$．我们有下列等式：

$$\begin{cases} y*e=y, \\ y*(\alpha*\beta)=(y*\alpha)*\beta, \text{若 } \alpha,\ \beta\in\pi_1(X). \end{cases}$$

对于每个 $\alpha\in\pi_1(X)$，映射：$y\to y*\alpha$ 是集合 E 的置换，它对于两个元素 α 与 β 的积，相应地给出置换的积（顺序相反）．这时就说，我们得到 $\pi_1(X)$ 由 E 的置换给出的表示．

底空间 X 的覆叠分类定理可以叙述如下：

$\pi_1(X)$ 由集合 E 的置换给出的每一表现对应于唯一一个覆叠 $Y\to X$（当然是在同构的意义下唯一）．

只介绍证明的原理：总的说来，问题在于由 X、E 以及运算 $y*\alpha$, $y\in E$, $\alpha\in\pi_1(X)$ 重新造出 Y．令 $z\in Y$，我们可用一条道路 f 把 z 在 X 中的投影 $p(z)$ 与点 x_0 联结起来，求这条道路的提升，则至少有一条道路可以把 z 联结到一点 $y\in E$．再有，知道了 y 与 f 便确定了 z；两对元素 (y, f) 与 (u, g) 对应于同一点 z 的充要条件是：闭路 $f*g'$ 的同伦类 α 把 y 变成 u，即 $u=y*\alpha$（见图 4）．因此，如果在元素对 (y, f) 的集合中引进下列等价关系：

$$(y,\ f)\sim(u,\ g),\quad \text{若 } u=y*(f*g')^{[注]},$$

[注] 这里的 $(f*g')$ 应该是它的同伦类．——译者注

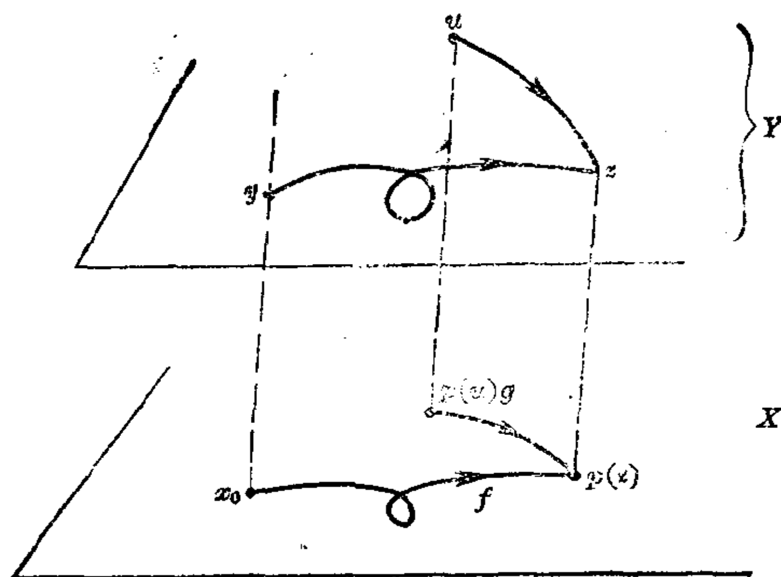


图 4

则相应的商集可以视为 Y.

剩下的事就是只由 X, E 以及运算 $y*\alpha$ 来定义 Y 的拓扑结构. 这不会出现严重的困难(不过正是这里需要 X 的局部正则性假设).

最有趣的是 Y 为连通空间的情形, 就是说 E 的两点可以用一条道路联结, 或者说由 $\pi_1(X)$ 确定的置换群是可迁的. 若 y_0 是 E 内一定点, $\pi_1(X)$ 中使得 $y_0*\alpha=y_0$ 的元素 $\alpha\in\pi_1(X)$ 的集合是 $\pi_1(X)$ 的子群 H, E 可以视为 $\pi_1(X)$ 的模 H 等价类的集合. 因此我们看到 X 的连通覆叠与 $\pi_1(X)$ 的子群成对应. 特别, 要使 X 的连通覆叠只是它自身(一叶覆叠), 充要条件是: X 是单连通的.

若取 H 是 $\pi_1(X)$ 的单位元所成的子群, 那么得到的 X 的覆叠 $\widetilde{X}$ 称为 X 的*万用覆叠*. 术语"万用"意味着 $\widetilde{X}$ 是 X 的任何连通覆叠 Y 的覆叠; 换言之, 投射 p: $\widetilde{X}\to X$ 被分解成 $\widetilde{X}\to Y\to X$.

特别, $\widetilde{X}$ 是单连通空间, 这是 X 的唯一一个具有上述性

质的连通覆叠.

若 Y 是 X 的一个覆叠,投射为 p, Y 的自同构是指任何连续映射 $g: Y\to Y$, 满足 $p\circ g=p$, 这样的映射必为把 Y 映成自身的同胚映射. 在 $Y=\widetilde{X}$ 的特殊情形, 我们指出 $\widetilde{X}$ 的自同构群与 $\pi_1(X)$同构(同构映射与点 $y_0\in\widetilde{X}$ 的选取有关); $\widetilde{X}$ 的两点 y_1 与 y_2 有同样的投影, 充要条件是: 存在 $\widetilde{X}$ 的自同构 g, 使得 $g(y_1)=g(y_2)$.

6. 基本群的确定

我们已经看到,知道了空间X的基本群$\pi_1(X)$,就可以确定X的所有覆叠.因此,对于给定的空间 X,算出 $\pi_1(X)$是有益的. 下面举几个计算 $\pi_1(X)$的例子:

1) $X=R^n$, n 维欧氏空间.

设 f 是起点与终点均为$(0, \cdots, 0)$的闭路. 若 $0\leqslant u\leqslant 1$, 令 $f_u(t)=uf(t)$, 则 $f_1=f$, 而闭路 f_0 是常值闭路. 因此, 任何闭路都同伦于 0, 这表明 R^n 单连通, 换言之 $\pi_1(R^n)=0$.

更一般地, 同样的推理也适用于 R^n 的每一凸开集.

2) $X=S_1$, 圆周.

因 $\pi_1(R)=0$, 故 § 1, 例 a)的覆叠 $R\to S_1$ 是 S_1 的万用覆叠, 它的自同构群与 $\pi_1(S_1)$同构. 这自同构群显然由幅度为 na 的垂直移动构成, 这里 a 是两圈螺线的距离, 所以这个群同构于整数群 z, 由此得到

$$\pi_1(S_1)=Z.$$

3) $X=S_n$, R^{n+1} 中的 n 维球面(设 $n\geqslant 2$).

首先指出, S_n 上的每条闭路 f 可形变成一条"折线"型闭路, 由首尾相接的大圆弧组成 (把区间 $I=[0, 1]$ 分成子区

间，使得每个子区间上点 $f(t)$ 保持在一个固定半球的内部，再定义一个从这个半球到大圆弧上的形变）．然后，我们选取一点 P，不在新闭路 f' 上（对于 f 这不一定可能：皮亚诺曲线！）．P 在 S_n 中的补集与 R^n 同胚，作球面投影便可证实此点；根据 1），闭路 f' 在这补集中与 0 同伦，自然在 S_n 中也同伦于 0，所以 f 也同伦于 0．由此得到

$$\pi_1(S_n)=0,\ n\geqslant 2.$$

4） $X=P_n$，n 维射影空间．

对于 $n=1$，P_1 与 S_1 同胚，故 $\pi_1(P_1)=Z$．现设 $n\geqslant 2$，这时 § 1，例 b）中的覆叠 $S_n\to P_n$ 是 P_n 的万用覆叠，因为 $\pi_1(S_n)=0$；于是这个覆叠的自同构群与 $\pi_1(P_n)$ 同构．又因是两叶覆叠，故 $\pi_1(P_n)$ 是两个元素的群．由此得到

$$\pi_1(P_n)=Z/2Z,\ n\geqslant 2.$$

5） $X=T^2$，二维环面．

环面与积空间 $S_1\times S_1$ 同胚．容易建立下列公式：

$$\pi_1(X\times X')=\pi_1(X)\times\pi_1(X').$$

由此推出
$$\pi_1(T^2)=Z\times Z,$$
这是有两个生成元的自由阿贝尔群．

也可利用下述事实推出所得结果：平面 R^2 是 T^2 的万用覆叠，自同构群平移 $m\omega+m'\omega'$ 构成的群，这里 ω，ω' 是无关向量（参看椭圆函数）．

可以取纬圆与子午圆为 $\pi_1(T^2)$ 的生成元．

6） X 是“双孔”定向曲面．

在所有上述例子中，我们可以明确地给出万用覆叠 $\tilde{X}\to X$，从而用它得到 $\pi_1(X)$．对于本例这就困难得多（有时借助于自守函数可以做到）．因此有必要使用别的方法．

我们把曲面 X 表为一个八边形，这八条边分别记为 a，

$b, a^{-1}, b^{-1}, c, d, c^{-1}, d^{-1}$(见图 5)．每一条边代表$X$上的一条闭路，其同伦类分别记为$\alpha, \beta, \alpha^{-1}, \beta^{-1}$，等等．显然，闭路积 $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}$ 与 0 同伦．于是使用类似于 3) 用过的那些形变法可证，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 生成 $\pi_1(X)$，它们所满足的关系都是下述关系的推论：

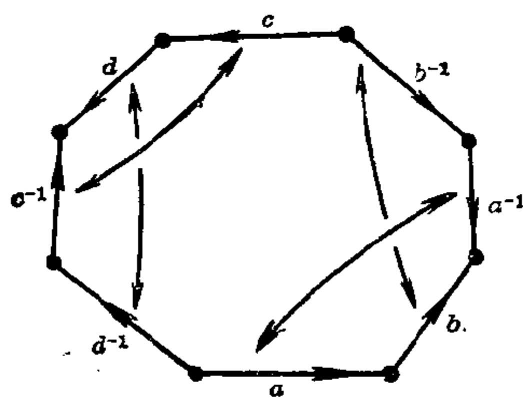


图 5

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}=1.$$

因此我们有下列简写表达式：

$$\pi_1(X)=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}/(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma\delta\gamma^{-1}\delta^{-1}).$$

这是一个基本群不是阿贝尔群的空间的例子．

7．单连通概念的应用·单值化定理

单连通空间的概念与复变函数论的关系如下：

令 X 是复平面 C 的区域，x_0 是 X 的一点，f_0 是$(x-x_0)$的幂级数，在 x_0 的一个邻域内收敛．若 x_t 是 X 上的一条道路，以 x_0 为起点，则可定义 f_0 沿着 x_t 解析开拓的概念；这是一种运算，一般说来，并不总是可能的．对于给定的级数 f_0，我们假设开拓总是可能的，并设 X 是单连通的．于是存在 X 上的全纯函数 f，在 x_0 的一个邻域内与 f_0 重合：这就是单值化定理，意思是说，解析开拓与道路的选取无关．对于两条相邻的道路，这是明显的；单连通的假设则可以使一条道路形变为一些依次相邻的道路而过渡到另一条道路．

当然，这个定理并非单复变函数论特有的结果，对于多复

变函数，调和函数等也是对的. 唯一的条件是要求开拓的局部唯一性.

下述结果可以归结为单值化原理：

G, H 是两个连通拓扑群，f 是把 G 映入 H 的"局部同态映射"，即是一个连续映射，把 G 的单位元素的一个邻域映入 H，满足 $f(xy)=f(x)f(y)$，这里 x 与 y 同单位元素充分接近，于是，若 G 是单连通的，则存在把 G 映入 H 的整体同态映射，它是 f 的开拓.

例子 $G=R$, $H=S_1$; $G=S_3$, $H=SO_3(3)$ (见 § 1).

8. 基本群概念的拓扑应用

群 $\pi_1(X)$ 显然是空间 X 的不变量：两个空间 X 与 X' 仅当它们的基本群同构时才可能同胚. 我们可以问：$\pi_1(X)$ 是否与 X 的其它拓扑不变量有关，特别是否与 X 的同调群（见后面 L_1 许互兹的讲演）有关. 1维同调群 $H_1(X)$ 的定义方法实际上与定义 $\pi_1(X)$ 的方法很接近：闭路不过就是 1 维循环，同伦于 0 的闭路是边缘，然而其逆不真（见 L. 许瓦兹的讲演），群 $\pi_1(X)$ 与 $H_1(X)$ 一般是不同的；我们仅有：

若 $\pi_1(X)$ 是阿贝尔群，则 $H_1(X)$ 同构于 $\pi_1(X)$.

由此可知，$\pi_1(X)$ 是比 $H_1(X)$ 更精确的不变量，下面的例子属于普昂卡雷：

设 K 是空间 R^3 的旋转群，它保持正二十面体不变；已知：K 同构于五个文字的交代群 A_5. 对于 § 1, c) 的覆叠 p: $S_3 \to SO(3)$，K 的逆像 G 是 S_3 的子群，S_3 有 120 个元素；此外，群 G 如果是阿贝尔群，就等于 0. 于是，定义 $X=S_3/G$,

即是S_3关于G所确定的等价关系的商群；空间X是3维紧致流形，以S_3为其万用覆叠，以G为基本群．由此可见$H_1(x)=0$，x与S_3有相同的同调群，虽然$\pi_1(X)=G$与$\pi_1(S_3)=0$不同．空间X称为普昂卡雷空间．这里正好提一下普昂卡雷猜测（一直未被证明）：

任何单连通的3维紧致流形均同胚于球面S_3.

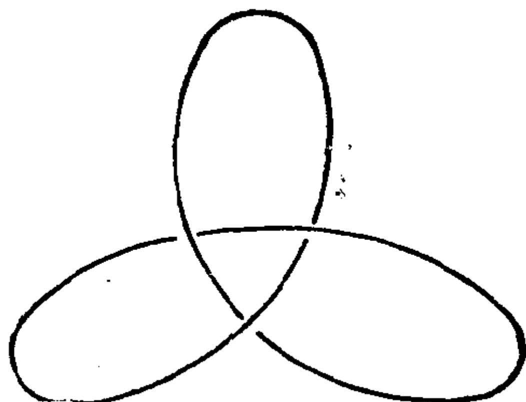


图 6

作为基本群在拓扑学中的另一应用，我们指出下面的纽结定理：

纽结是指R^3中与圆周S_1同胚的子空间N；换言之，这是R^3中一条无重点的闭路．两条纽结N与N'叫做同构的，如果存在把整个R^3映成自身的同胚映射，把N变成N'，并保持R^3的定向，同构于平面上圆周的纽结叫简单纽结（实际上没有"打结"）．怎样证明一条给定的纽结，例如"三叶纽结"（图6），不是简单纽结呢？注意，若N与N'同构，则它们的补集R^3-N与R^3-N'同胚，故有相同的基本群，这就导致研究$\pi_1(R^3-N)$，称为纽结N的群；两个纽结的群如果不同构，这两条纽结就不同构．有一种方法，可以由生成元和其间的关系来确定投射给出的纽结群．对于简单纽结S_1，这个群是Z；对于三叶纽结，这个群由两个生成元x，y产生，其间的关系是$xyx=yxy$．因为这个群不是阿贝尔群（事实上，它以三个文字的对称群作为商群），故不与Z同构，三叶纽结的确是有结的，正如我们所预料那样！

注意，这里同调群仍然不会起什么作用．事实上，对于任何纽结N，$H_1(R^3-N)=Z$.

9. 对代数函数存在定理的应用

设 c 是复数体 C 上的一条代数曲线，无奇点，f 是 c 上的有理函数. 可以将 f 视为把 c 映入球面 S_2 的连续映射(将 S_2 等同于添加了无穷远点的复平面 C). 我们不考虑 f 为常数的平凡情形. 映射 $f: c \to S_2$ 使 c 成为 S_2 的一个"多分枝覆叠"，这表明，如果从 S_2 中挖掉使映射 f 的微分为零的点，便得一个真正的覆叠 $Y \to X$，空间 X 是挖掉一些点 $P_1, \cdots, P_r$ 的 S_2，Y 是挖掉了诸 P_i 的逆像的 c. 这就是单变量代数函数的*黎曼存在定理*，故有结论：

挖掉了点 $P_1, \cdots, P_r$ 的球面，它的任何有限多叶的连通覆叠结构均可由上述方法唯一得到.

(唯一性容易；存在性涉及到某些强有力的分析方法，第一个(正确的！)证明属于希尔伯特).

$X = S_2 - \{P_1\} - \cdots - \{P_r\}$ 的基本群是有 $r-1$ 个生成元的自由(非阿贝尔)群，上述结论可以化为代数函数的存在定理，这种代数函数具有若干"确定条件"，按照 $r-1$ 个已知代替法则互相替换.

作为出发点，如果不用曲线 c 而用曲面 S，就应该把射影直线 S_2 换成射影复平面 $P_2(C)$，把点 $P_1, \cdots, P_r$ 换成平面代数曲线 $D_1, \cdots, D_r$. 存在(唯一)定理仍有效；这就是*恩里克定理*.

文　献

最好的教材无疑是：

H. Seifert und W. Threlfall «Lehrbuch der Topologie», Teubner, 1934; Chelsea 1947 年照相拷贝(见第 7 章, 第 8 章). 中译本«拓扑学», 江泽涵译.

对于基本群、万用覆叠的结构及其在拓扑群中的应用，也可参看:

L. Pontrjagin: «Topological Groups», Princeton, 1946 (第 8 章). 中译本«连续群»，曹锡华译。

第十讲　代数拓扑：同调论初步

L. Schwartz　(索尔本大学教授)

我们先要讲一些事实，涉及普昂卡雷时代所谓的"形势分析"(l'Analysis situs)[注]．因此，我们要提出"代数拓扑"这门学科中一些最基本的直观概念，其中重点讨论那些与"同调论"有关的问题．

1．直观几何的几个问题

1）球面是三维空间的曲面，球面上有闭曲线的概念．通过保持闭曲线特征的连续形变，我们可以把闭曲线缩成一点(后面提到这个性质时就说闭曲线同伦于零)．

在环面上除了上述类型的曲线 C，即是可以缩成一点的闭曲线，特别是环面上一个充分小区域内的所有闭曲线外，环面上显然还有另外一些曲线 C'，例如经圆，绕中心圆周旋转，以及曲线 C''，例如纬圆，绕环面的轴旋转，曲线 C' 和 C'' 都不可能由使之保持闭合的连续形变缩成一点，也不可能彼此互变．

上面提出的问题就是同调论的研究对象．

2）缩成一点的问题与交截问题有关：例如环面上的曲线 C' 与 C'' 必定至少相交于一点(我们不妨回想二次曲面上的两族直母线)．

[注]　今称拓扑学．——译者注

3) 区域问题

考虑“有洞的”三维空间 R^3，即挖去一点，例如挖去原点后的 R^3(所以是 R^3-O)，其中每条闭曲线可缩成一点，但不是所有的闭曲面都能缩成一点：如果 O 属于一个球面的内部区域，则该球面在 R^3 中不能缩成一点，否则形变时将通过 O. 这就提出曲面同伦的问题. 我们又碰到了一张曲面（例如上述球面）与一条曲线（例如半直线 Ox）的相交问题.

如果没有精确的定义，显然不能从数学上来研究这些问题. 例如，紧致曲线是指区间[0, 1]的连续像，如果 0 与 1 有同样的像，就说该曲线是闭的. 对于平面，我们知道约当定理的结论：任何无重点的闭曲线将平面分成两个区域.（依定义，同一区域内的两点可以用一条与给定的闭曲线无交点的连续曲线联结起来，但不同区域的两点，则不可能这样联结起来.）因此发生一个交截问题，这个结果在环面上不成立，因为上面提到的曲线 C' 与 C'' 虽然都是闭曲线且无重点，但却不能把环面分成两个区域. 如果考虑到这个情况，就不能认为上述结果是显而易见，无足轻重的.

4) 向量场问题

在一个圆周上，显然可以定义一个向量场，向量与圆周相切，随圆周的点连续地变动，决不为零. 然而，在 R^3 的一个球面上这是可能的吗？回答是“不可能”. 不过，在 R^4 的三维球面上却又是可能的. 可以证明：在 R^{n+1} 的球面 S^n 上，存在这样的场的充要条件是：n 为奇数. 这个问题对曲面上微分方程的研究极重要，诸如存在性，奇点分类，颈状区(Col)，纽结等等（勒夫西兹的工作）.

5) 变换的不动点存在问题具有同样性质. 例如，可以证明，每个把球体映入自身的连续映射至少有一个不动点.

6）当我们讨论复平面内留数的计算时，要研究一个曲线积分，计算积分曲线“环绕”原点或奇点多少次．这是一个正数，零或负数，依赖于所考虑的奇点同复平面无穷远点相联的一条曲线与积分曲线交点的“代数”个数．这个“环绕数”应予定义，虽然就简单情形而言在直观上是显然的．

2．曲面的边缘

我们来更详细研究一个问题，它与上述诸问题都有关，而且特别有代表性．我们只讨论紧致空间．

在一个相当简单的拓扑空间上，假设有一条闭曲线（不论是否有重点），该曲线能否是一张曲面的边缘？

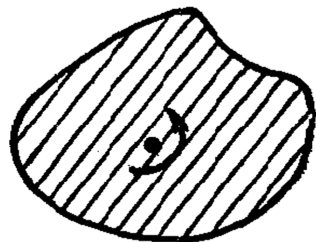


图 1

首先直观地看一下上面所提问题的意思．假设（图 1）一条曲线围成一张定向曲面[注]，曲线的定向应该与所选定的方向一致．反之，设有一闭曲线沿确定方向绕行，它能否成为一张曲面的“边缘”？在球面上是对的，它是两张曲面的边缘，这两张曲面必有不同定向．然而在环面上呢？对于类似于经圆的曲线 C'，结论不对，因为对环面定了向后，曲线 C' 上就有一个二重方向；这条曲线沿相反的方向绕行两次，所以应该看成是零．对于曲线 C''，例如纬圆，情况也是一样．因此，在环面上有些闭曲线不能成为曲面的边缘．R^2-O 的情形也一样，如果照我们前面所说，只考虑紧致曲面，即是不考虑无穷远点．在

〔注〕 原文为在其上每一点都定向的曲面．曲面可以有“在一点定向”的概念，而且与整体定向的概念一致．但这里似与局部定向无关，故略去“在其上每一点”．——译者注

R^3-O 内，一条闭曲线是曲面的边缘，但一张含有 O 的球面则不是边缘.

上面所举例子对于"缩成一点"与"曲面的边缘"这样两个问题情况都一样，这表明这两个概念之间是有联系的. 首先，缩成一点是同伦问题，其次，曲面边缘的研究是同调问题. 这两问题并不等价：同伦的观点更精细，即是说，凡是可以由连续形变缩成一点的闭曲线都是曲面的边缘，凡是可缩成一点的闭曲面都是一立体的边缘，等等，但其逆不确：有些曲面(立体等)的边缘，不可能由连续形变缩形一点，下面举些例子来说明：

第1个例子 在平面 R^2 内，挖掉两点 A 与 B，画出曲线 1234，如图 2 所示. 这曲线显然是曲面的边缘，假设按弧段 1 与 3 逆向，2 与 4 逆向定义方向，则在同调的意义下，曲线归结为零，但是在同伦的意义下，它不能缩成一点.

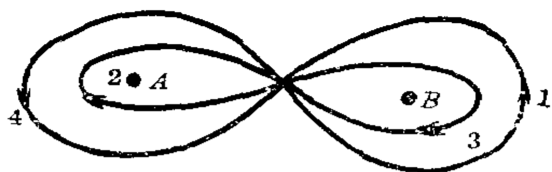


图 2

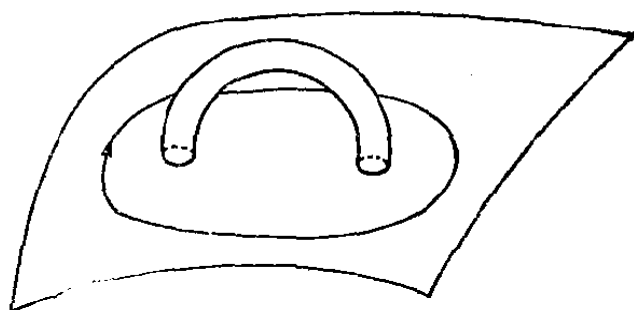


图 3

第2个例子 图 3 表示曲面上打了两个洞，把一根管子的两头接在洞口. 环绕这两个洞的闭曲线 C 是一张曲面的边缘，但是，它显然不能化成零，即使管子化成一条联结两点的线.

因此，同调论比同伦论简单. 后者肇始于普昂卡雷，但人们很快就去搞同调论了.

特别,对于上面提到的留数定理,真正起作用的是同调论的观点. 再提一下那个定理,开头说得很含糊:若 $f(z)$ 是平面上的一致全纯函数,则 $\int_C f(z)dz=0$,其中,C 是任意闭曲线.但是,如果函数有极点,柯西曾对每一极点定义了函数在该点处的所谓留数,而柯西基本定理可以表为下述等式:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum R_i,$$

上式右端是曲线 C"包围"的诸极点处留数的和.

就图 2 来说,显然可见,A 与 B 若为极点,则积分为零,因为以所说曲线为边界的曲面不含极点.但积分曲线不能(不穿过极点)缩成一点.就图 4 来说,积分曲线的走向如图所示,有必要规定 A 那种点的系数为 1,B 那样的点的系数为 2. 同样,就图 5 及 5′ 而言,必须使用 +1 与 +1,或 +1 与 −1.

因此,为了赋予一张曲面在极点邻近的系数,必须考虑曲面的边缘曲线,考虑曲线的定向以及曲面极点的阶数.

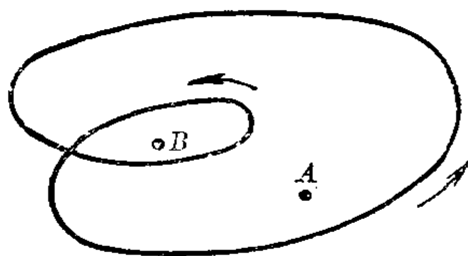


图 4

复变数的有理分式可视为黎曼球面上的亚纯函数;而该球面上的简单闭曲线 C 是两张曲面 S_1 与 S_2 的边缘,S_1 与 S_2 的并集构成整个球面,应分别赋与系数 +1 与 −1,因此沿 C 的积分值等于 S_1 内诸极点的留数和减去 S_2 内诸极点的留数和.由此推出留数总和是零.然而,很明显,实际上所考虑的曲



图 5

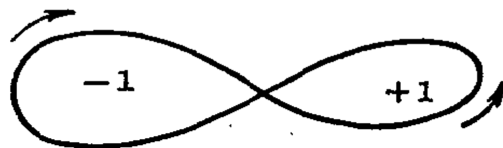


图 5′

线 C 并不影响这结果；只需考虑整个球面，其边缘为零，便可得到结论。

3. 确切的定义

我们刚才指出了问题是怎样产生的，使人感到了它的重要性。现在的问题是要给以精确的形式。任何数学理论都表达一种直观的思想，但应当不断使直觉升华，因为直觉有碍于论证，并有陷入"偷送论据"[注]的危险。我们将只讨论紧致拓扑空间，例如球面 S^2 或环面 T^2. 所考虑的曲面都假设是可三角剖分的，即是可用一些单形铺满。

复形 我们已经知道（见 H. 嘉当的讲演）如何在 R^{n+1} 中定义 n 维单形（$n=0$ 时是一点；$n=1$ 时是线段；$n=2$ 时是三角形面；$n=3$ 时是四面体，等等），以及如何定义单形的面，即是维数小于 n 的单形。我们说，曲面 S^2 或 T^2，或者任何紧致拓扑空间可以用单形铺满，如果下列条件满足：

1） 曲面上的单形是从 R^n 的单形出发，经同胚映射确定的：曲面上选出的每一单形 σ 都经过一个确定的同胚映射对应于 R^n 的一个单形 σ^1（从而 σ 的所有维数 $\leqslant n-1$ 的面完全确定）；σ 叫拓扑单形。

2） 曲面被有限个单形覆盖（紧致性假设）。

3） 两个单形的交或者是空集，或者正好是一公共面。

如果一个空间存在这样的填铺方式，就称为复形。

一般，根据条件 2），对于这种剖分给出的复形，可以定义它的拓扑维数是所含单形的最大维数 n. 但必须指出，拓扑

[注] 即证明中以本身尚待证明的判断作为论据的一种逻辑错误。——译者注

维数可能不是处处一样(例如，考虑添上一条细线的球面).

假设曲面可三角剖分，就可以使问题大大简化；例如，一条曲线就是一维单形的并集. 但是，每一拓扑流形都可三角剖分吗？这个问题一般没有解决. 不过，提出这个简化假设是有道理的，至少开头是这样. 另一方面，我们指出，一个空间即使有若干不同的三角剖分，但下面要定义的同调群却与所选取的剖分无关.

复形的链 首先定义 p 维胞腔.

p 维胞腔是排成一定次序的一组 $p+1$ 个相同或不同的点，记为 $a_0a_1\cdots a_p$. 这些点是复形的同一个单形的所有顶点.

0 维胞腔是三角剖分的任一顶点 a_0.

1 维胞腔是一维单形的两个顶点的组 a_0a_1. 必须注意，a_1a_0 是另一个 1 维胞腔，它与 a_0a_1 是完全不同的，a_0a_1 也视为 1 维胞腔，它的两个顶点重合.

p 取定后，p 维胞腔的个数 N_p 有限(假设 2)，可以记成：

$$\gamma_p^1,\ \gamma_p^2,\ \cdots,\ \gamma_p^{N_p}.$$

p 维链就定义成 p 维胞腔的整系数的形式线性组合：

$$\gamma=\sum_{i=1}^{N_p}\xi_i\gamma_p^i,\quad \xi_i\in Z.$$

定义链的加法法则如下：

$$\left(\sum\xi_i\gamma_p^i\right)+\left(\sum\eta_i\gamma_p^i\right)=\sum(\xi_i+\eta_i)\gamma_p^i.$$

这加法是结合的，交换的；零链(对于所有 i，$\xi_i=0$)是加法零元素.

因此，p 维链的集合是一个阿贝尔群，记成 Γ_p.

p 维链的边缘 这是一个$(p-1)$维链，下面给出定义. 一个 p 维链依定义可以写成

$$\sum_{i\in I}\xi_i\gamma_p^i,$$

I 是集合 $\{1, 2, \cdots, N_p\}$.

首先定义

$$(\sum \xi_i \gamma_p^i) \text{ 的边缘} = \sum \xi_i (\gamma_p^i \text{ 的边缘}).$$

这归结为定义胞腔的边缘.

a_0 是 0 维胞腔. 它的边缘是零.

ab 是一维胞腔. 它的边缘是 0 维链, 定义成: (ab) 的边缘 $= +b-a$, 记成 $\mathscr{B}(ab)$.

2 维胞腔 abc 的边缘是

$$\mathscr{B}(abc) = bc - ca + ab,$$

一般, p 维胞腔 $a_0a_1a_2\cdots a_p$ 的边缘是 $(p-1)$ 维链:

$$a_1a_2\cdots a_p - a_0a_2\cdots a_p + \cdots + (-1)^k a_0a_1\cdots a_{k-1}a_{k+1}\cdots a_p$$
$$+ \cdots + (-1)^p a_0a_1a_2\cdots a_{p-1}.$$

很简单的形式计算使我们能确定 p 维链的边缘.

p 维循环(粗略等价于 p 维闭流形) p 维循环定义成边缘是零的 p 维链.

把 p 维链变成它的边缘的运算满足 $\mathscr{B}(\gamma_1+\gamma_2) = \mathscr{B}(\gamma_1) + \mathscr{B}(\gamma_2)$ (根据边缘运算的定义), 所以 p 维循环的集合 Z_p 是阿贝尔群, 含于 p 维链群 Γ_p 内.

问题 在 p 维链中, $p+1$ 维链的边缘有什么性质[注]?

1) 边缘是一个循环, 换言之, 边缘的边缘恒为零. 只需对一个胞腔证明 $\mathscr{B}\mathscr{B}(\gamma_p^i) = 0$ 即可. 例如:

$$\mathscr{B}(abc) = bc - ac + ab,$$

$$\mathscr{B}\mathscr{B}(abc) = c - b - c + a + b - a = 0.$$

推广至一般情形毫无困难.

因此, 令 B_p 表示成为边缘的那些 p 维链的集合, 则有包

[注] 这句的原文是: p 维循环中, $(p-1)$ 维链的边缘有什么性质?——译者注

含关系：$\Gamma_p \supset Z_p \supset B_p$.

2）这样一来，边缘群是循环群的子群．但是，这些群是否相同呢？凭直观，对于球面 S^2 答案是肯定的，而对环面 T^2 则不然．研究商群 $Z_p/B_p = H_p$ 便可作确切的比较．这商群称为所研究流形的 p 维同调群[注]，它刻划了所研究的结构．成为边缘的 p 维链即 B_p 的元素叫做同调于零的，记成 ~ 0．两个循环 Γ 与 Γ' 叫做同调的，如果它们属于同一个等价类，即它们的差同调于零（换言之，这差是边缘），写成 $\Gamma \sim \Gamma'$.

同调群的计算是按代数拓扑的方法进行的．我们只指出几点注意：

a）退化胞腔 aa 是循环，因它的边缘是 $a-a=0$．但 aa 是边缘吗？是的，它是 aaa 的边缘，故它同调于零，就是说可以把 aa 从链中消去：$aa \sim 0$.

b）链 $ab+ba$ 同调于零：$ab+ba \sim 0$．事实上，bab 的边缘 $\mathscr{B}(bab) = ab - bb + ba \sim ab + ba$．因此，从同调的观点看，可用 $-ba$ 代替 ab：$ab \sim -ba$.

c）更一般，在一个胞腔中，对顶点施行置换得到新的胞腔，与原来的胞腔是否同调，就看所用的置换是偶置换还是奇置换而定．

计算同调群的例子

1）球面 S^2 假定已经三角剖分，0 维循环就是 0 维链 $\sum \xi_i a_i$，诸 a_i 是三角剖分的顶点．

0 维边缘是 0 维循环 $\sum \xi_i a_i$，使得 $\sum \xi_i = 0$．这个条件显然是必要的，因为它对于胞腔的边缘为真．它又是充分的，因为在球面上，可以把一个选定的顶点 a_0 与任何顶点 a_i 联结起

[注] 提醒一下，若 Z 是用加法表示的阿贝尔群，B 是其子群，则 $H=Z/B$ 是由下列关系确定的等价类的集合：$x \in Z$, $y \in Z$, $x \equiv y \Leftrightarrow x-y \in B$.

来，所以链$(a_i-a_0)\sim0$. 然而，若$\sum\xi_i=0$，则$\sum\xi_ia_i=\sum\xi_i(a_i-a_0)\sim0$.

于是，两个0维循环等价即同调，如果它们有同样的整数值$\sum\xi_i$. 这表明同调群$H_0=Z_0/B_0$是整数群.

我们看到只要任意两点都可以用1维单形构成的折线联结起来，就是说，所考虑的复形是连通拓扑空间，那么上述结论仍然成立. 例如，不相交的两个球面的并集就不是这样，这时，H_0是整数对所成的群，它给出了连通区的个数.

现在研究$H_1=Z_1/B_1$. 可证在球面上每个1维循环都是边缘，故B_1等于Z_1，因此H_1是仅有零元素0所成的群(为了完成证明，要利用三角剖分，例如，分成8个三角形，它们的边都是四分之一的大圆).

我们不讨论二维同调群了.

2) 在一点0处穿孔的平面，即是R^2-0. 这不是紧致空间，但我们规定只使用有限多个胞腔组成的链，以便继续使用有限同调论或具有紧致支集的同调论的方法. 可以证明，能够定义一个基本循环γ_1，它的同调类用1表示，使得任何循环γ都同调于基本循环的n倍(从而$\gamma-n\gamma_1\sim0$，这是边缘)，这里整数n的符号任意. 按定义，相应于整数n的同调类，就是"围绕点0的代数次数为n的"那些循环组成的等价类. 因此，1维同调群是整数群.

3) 环面T^2. 用代数拓扑的方法可以证明：环面的同调群是整数对(m, n)所成的群，其加法法则为

$$(m, n)+(m', n')=(m+m', n+n').$$

如果我们用$(1, 0)$代表同调于环面经圆的曲线C'，用$(0, 1)$代表同调于环面纬圆的曲线C''，则每一循环同调于$mc'+nc''$，m与n是唯一确定的. 因此，我们说，在代数意义下，这

个循环围绕中心圆周m次，围绕旋转轴n次．例如 Villarceau 圆环绕旋转轴及中心圆各一次，其同调类是$(\pm 1, \pm 1)$[注]．

[注] C'与C''都有确定的走向，m与n是符号任意的整数．有两族 Villarceau 圆，每一族都有两个走向．因此给出四个同调类：$(1, 1)$，$(1, -1)$，$(-1, 1)$，$(-1, -1)$．